

9.1. Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$

• Mittel-/Erwartungswert einer Observablen $f(x)$:

$$\langle f \rangle = \int f(x) \underbrace{P(x) dx}_{\text{Wahrscheinl. mit der } f(x) \text{ verknüpft!}} \quad (3.3)$$

• n -tes Moment von $P(x)$:

$$\langle x^n \rangle = \int x^n P(x) dx \quad (3.4)$$

insbes.:

(i) Mittelwert: $\langle x \rangle$

(ii) Varianz von x

= Schwankungsquadrat

= mittlere quadratische Abweichung

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$= \text{Var}(x)$$

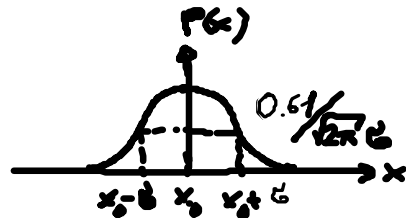
(3.5)

Standardabweichung, Δx ... "Breite von $P(x)$ "
Schwankungsbreite

(3.6)

• Bsp: Gaußsche / Normalverteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.7)$$



Momente:

$$n \text{ gerade: } \langle (x-x_0)^n \rangle = \overbrace{(n-1)(n-3)\dots}^{(n-1)!!} \sigma^n$$

$$\text{insbes.: } \langle (x-x_0)^2 \rangle = \sigma^2$$

$$n \text{ ungerade: } \langle (x-x_0)^n \rangle = 0$$

$$\text{insbesondere: } \langle x \rangle = x_0$$

} (3.8)

• Kerntrick aller $\langle x^n \rangle \leftrightarrow P(x)$ (3.9)

Beweis über charakt. Funktion: $G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle$

• mehrdimensionale Verteilungen: $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$... stoch. Variable
 $P(\underline{x}) d^n x$... Wahrscheinlichkeit für $[x_1, x_1+dx_1] \dots [x_n, x_n+dx_n]$

(i) unabhängige stoch. Variable x, y :

$$P(x, y) = P(x) P(y) \quad (3.10)$$

... Multiplikationsregel

(ii) Korrelationsfktn.:

$$C_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle) (x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \quad (3.11)$$

$$= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$$

... Kovarianzmatrix

stoch. unabh. Variable $\rightarrow C_{ij} = 0!$

(iii) Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)$

für $x_1 \dots x_k$, wenn $x_{k+1} \dots x_n$ mit Sicherheit vorliegen:

$$P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1} \dots x_n)} \quad (3.12)$$

$$\text{wobei } P(x_{k+1} \dots x_n) = \int dx_1 \dots dx_k P(x_1, \dots, x_n)$$

[Beweis: $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) P(x_{k+1} \dots x_n) !!]$

3.2 Zentraler Grenzwertsatz

Seien x_1, x_2, \dots, x_N voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$, dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\Delta y)} e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \quad (3.13)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \Delta x^2$

Insbesondere gilt: $\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

• Beweis: Stat. Phys. I, S509, Kap. 3.5 [Ehrlich: Vorlesung?]

9.3 Zeitabhängige Zufallsvariablen

• Behandlung in 10: $x = x(t)$... zeitabhängige Zufallsvariable

• Führe ein:

$$P(x_n, t_n, \dots; x_1, t_1) dx_1 \dots dx_n \quad \text{mit } t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

... Wahrscheinlichkeit x zur Zeit t_1 in $[x_1, x_1 + dx_1]$
" " t_2 " $[x_2, x_2 + dx_2]$
" " t_n in $[x_n, x_n + dx_n]$

vorgefunden.

(9.14)

Bem: (i) für $n=1, 2, \dots$ → Hierarchie von Wahrscheinlichkeitsdichten

(ii) insbesondere:

$$P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = \int P(x_n, t_n, \dots; x_1, t_1) dx_n \quad (9.15)$$

• Berechnung von Zeitkorrelationsfkt.:

Bsp: $\langle x(t_2) x(t_1) \rangle = \iint x_2 x_1 P(x_2, t_2; x_1, t_1) dx_1 dx_2 \quad (9.16)$

a) Klassifizierung Stochastischer Prozesse:

• Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte: [vgl. Gl. (9.12)]

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = \frac{P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{P(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)} \quad (9.17)$$

... für x_n, t_n wenn $x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1$ mit Sicherheit vorliegen

• reiner Zufallsprozess:

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = P(x_n, t_n) \quad (9.18)$$

$$\stackrel{(9.17)}{\rightarrow} P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n) \dots P(x_1, t_1)$$

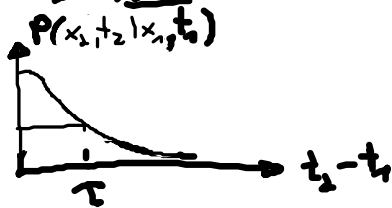
keine Korrelationen zwischen verschiedenen Zeiten,
nicht möglich in physikal. System mit $x = x(t)$

• Markov-Prozess:

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$\stackrel{(9.17)}{\rightarrow} P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) P(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \dots P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) \quad (9.19)$$

→ nur Gedächtnis für den vorigen Zeitpunkt!



Übergangswahrscheinlichkeit.

$$P(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{P(x_2, t_2; x_1, t_1)}{P(x_1, t_1)}$$

→ $P(x_2, t_2; x_1, t_1)$ bestimmt Markov-Prozess vollständig!

• insbesondere gilt:

$$P(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2$$

... Chapman-Kolmogorov-Gl.!!

• "beliebige Wahrscheinlichkeit, egal welcher Wert x_2 angenommen wird"