11. Allgemeine Beschreibung stochastischer Prozesse

- Motivation:
  - (i) allgemeine Theorie der stochast. Differentialgl. (SDG)
    - $\Gamma(t)$... stochastische Kraft [nicht unbedingt therm. Ursprungs]
  - (ii) Ito-/Stratonovich-Interpretation
  - (iii) Herleitung der Fokker-Planck-Gl.

11.1. Stochastische Differentialgleichung I

- allgemeine 1D-Langevin-Gl. = SDG:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = h(x,t) + g(x,t)\,\Gamma(t) \\ &\text{mit } \langle \Gamma(t)\rangle = 0 \,, \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta(t-t') \end{aligned}} \qquad (11.1)$$

<u>Bem:</u> (i) $\Gamma(t)$ ... Gaußsches weißes Rauschen

durch $\langle\Gamma\Gamma'\rangle$ bestimmt $\qquad \langle\Gamma\Gamma'\rangle = \delta(t-t')$

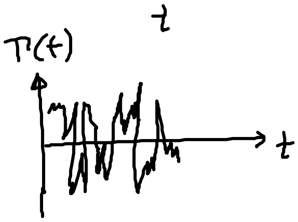
(ii) $\sqrt{g}$ ... Stärke von $\Gamma(t)$

(iii) nicht unbedingt therm. Ursprungs, Bsp: aktive Teilchen, Mikroorganismen

(iv) $g = g(t)$ ... additives Rauschen
$g = g(x,t)$ ... multiplikatives "

- formale Integration

$$x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t')\,\Gamma(t')\,dt' \qquad (11.1b)$$

Problem:


... hochgradig irregulär, Korrelationszeit = 0!

$\longrightarrow \int_t^{t+\tau} \ldots \Gamma(t')\,dt'$ <u>nicht</u> definierbar

- Ausweg:
  - (i) Betrachte: $h=0$, $g=1$

(11.1) $\longrightarrow$ Brownsche Bewegung:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = \Gamma(t) \\ \text{mit } \langle x(t)\rangle = 0, \; x(0) = 0 \\ \qquad \langle [x(t+\tau) - x(\tau)]^2 \rangle = \tau \\ \text{bzw: } \langle x(t+\tau)\, x(t) \rangle = t \end{array}} \quad (11.2)$$

Beweis: (1) $\langle [\dots]^2 \rangle$ ... s. (10.23), (10.25) mit $\gamma = 1$, $k_B T = \frac{1}{2} \longrightarrow D = \frac{1}{2}$

(2) $\langle x(t+\tau)\, x(t) \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle x^2(t+\tau) + x^2(t) - [x(t+\tau) - x(t)]^2 \rangle\right]$

$$\overset{(11.2)}{=} \frac{1}{2}\left[t + \tau + t - \tau\right] = t \qquad \text{qed}$$

$\longrightarrow$ andere Sichtweise auf (11.1b)

(i) Führe ein: $$\boxed{W(\tau) = x(t+\tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} \Gamma(t')\, dt'} \quad (11.3)$$

Bem: (1) stochastische Variable, gleiche Momente wie x von Brownscher Bewegung

(2) glattere Funktion als $\Gamma(t)$!

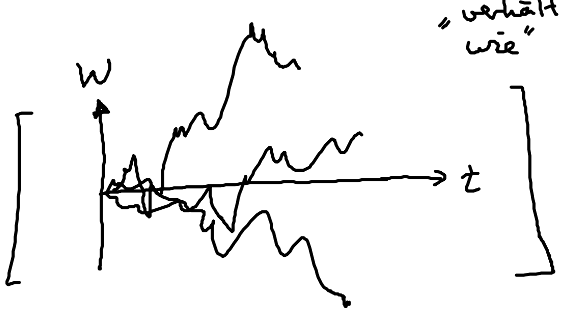
definiere:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Wiener-Prozeß:} \\ \text{stochastische Variable } W(t): \\ \text{mit } W(0) = 0 \\ \qquad \langle W(t) \rangle = 0, \; \langle W(t+\tau) W(t) \rangle = t, \; \tau \geq 0 \end{array}} \quad (11.4)$$

NB: formal $dW =$ „$\Gamma(t)\, dt$", aber $\dot{W} = \Gamma(t)$ existiert nicht!

denn: $\dot{W} \sim \frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \underset{\uparrow}{\approx} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \longrightarrow \infty, \; \varepsilon \longrightarrow 0$

„verhält sich wie"



$\longrightarrow$ Wiener-Prozeß ist <u>nicht</u> differenzierbar!

(ii) also: (11.1b) $\longrightarrow$

$$\boxed{x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x, t')\, dt' + \int_t^{t+\tau} g(x, t')\, dW(t')} \quad (11.5)$$

$$\underbrace{\text{stochastische Variable: } x(t') \text{ ist Funktion von } W(t)!}_{\text{Integration?}}$$

11.2 Integrale nach Ito & Stratonovich

- Definition der Integration:

Berechne: $\int_0^t \ldots \, dW(t')$ mit $N+1$ Stützstellen t_i, $i = 0, \ldots, N+1$

(i) nach Ito:

$$\boxed{\begin{aligned} A_I &= \int_0^t g[x(t'), t'] \, dW(t') \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N} g[x(t_i), t_i] \underbrace{[W(t_{i+1}) - W(t_i)]}_{\Delta W(t_i)} \end{aligned}} \quad (11.6)$$

NB: g am Anfang des Δt-Intervalls!

(ii) nach Stratonovich:

$$\boxed{\begin{aligned} A_S &= \int_0^t g[x(t'), t'] \, dW(t') \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N} g\left(\frac{x(t_i) + x(t_{i+1})}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) [W(t_{i+1}) - W(t_i)] \end{aligned}} \quad (11.7)$$

NB: „g in der Mitte des Δt-Intervalls!"

<u>Bem</u>: (1) gewöhnliche Riemannsche Integrale: $A_I = A_S$

hier nicht! s.u.

(2) A_I ist stochast. Variable!

<u>Sichtweise</u>:

Integrale A_I, $\bar{A}_I = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N} f[x(t_i), x(t_{i+1}), W(t_i), W(t_{i+1}), t_i, t_{i+1}]$

sind identisch, falls mittlerer quadratischer Limes

$$\langle (A_I - \bar{A}_I)^2 \rangle = 0$$

Bsp: s.u.

ebenso für A_S

- Beispiel: Berechne $\int_0^t W(t)\, dW(t)$

(i) $A_I = \sum_{i=0}^{N} W(t_i) \underbrace{[W(t_{i+1}) - W(t_i)]}_{\Delta W(t_i)}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} \{ \underbrace{[W(t_i) + \Delta W(t_i)]^2}_{W^2(t_{i+1})} - W^2(t_i) - \Delta W^2(t_i) \}$$

$$= \frac{1}{2} [W^2(\underset{\uparrow \, t}{t_{N+1}}) - \underbrace{W^2(0)}_{=0}] - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} \Delta W^2(t_i)}_{\text{Berechne im Mittel!}}$$

$$\langle \Sigma \Delta W^2(t_i) \rangle = \sum \langle [W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 \rangle$$

$$= \sum_i \langle W^2(t_{i+1}) - 2W(t_{i+1}) W(t_i) + W^2(t_i) \rangle$$

$$= \sum_{i=0}^{N} (\underbrace{t_{i+1} - 2t_i + t_i}_{\Delta t}) = t$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} A_I = \frac{1}{2} W^2(t) - \frac{t}{2} \\ \text{insbes.: } \langle A_I \rangle = 0 \end{array}} \quad (11.8)$$

(ii) $A_S = \sum_{i=0}^{N} \frac{W(t_i) + W(t_{i+1})}{2} [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} [W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)]$$

$$\xrightarrow{\text{s.o.}} \boxed{\begin{array}{l} A_S = \frac{1}{2} W^2(t) \neq A_I \\ \text{insbes.: } \langle A_S \rangle = \frac{t}{2} \end{array}} \quad (11.9)$$

NB: bei Stratonovich: Integrationsregeln wie bei Riemann-Integral

bei Ito: andere Regel!

11.3 Stochastische Differentialgleichung II

- verschiedene Interpretationen der SDG:

(i) <u>Ito-Interpretation</u>: (11.5) mit $\tau = dt \to 0$, $t' = t$

$$\left[x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t')\,dW(t')\right]$$

$$\longrightarrow \quad x(t+dt) = x(t) + h(x,t)\,dt + \underbrace{g(x,t)}_{\text{zur Anfangszeit } t!! \,\hat{=}\, \text{Ito!}}\,dW(t) \qquad (11.10)$$

Führe ein:

wegen $\langle dW^2(t)\rangle = \langle [W(t+dt) - W(t)]^2\rangle \overset{(11.4)}{=} t + dt + t - 2t = dt$

$$\boxed{dW(t) = dw\sqrt{dt}} \qquad (11.11)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} dx(t) &= x(t+dt) - x(t) \\ &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle d^2w\rangle = 1 \end{aligned}} \qquad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

(ii) <u>Stratonovich-Interpretation</u>

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t)\,dt + g(x,t) \circ dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle d^2w\rangle = 1 \end{aligned}} \qquad (11.13)$$

verwende Stratonovich-Regel

... SDG in Stratonovich-Interpretation

Bem: dw ... Gaußsche Zufallsvariable, Varianz 1

$\langle \ldots \rangle$ aus (11.4) mit (11.11)