11.3 Stochastische Differentialgleichung II

(i) Ito-Interpretation:

$$\boxed{dW(t) = dw\sqrt{dt}} \quad (11.11)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} dx(t) &= x(t+dt) - x(t) \\ &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle dw^2\rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.12)$$

(ii) Stratonovich-Interpretation:

Schreibe formal:

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t)\,dt + g(x,t) \circ dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle dw^2\rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.13)$$

wende Stratonovich-Regel

... SDG in Stratonovich-Interpretation

Berechne: [mit $dW = dw\sqrt{dt}$]

$$g(x,t)\circ dW(t) = g\Big(\frac{x(t)+x(t+dt)}{2}, \frac{t+t+dt}{2}\Big)dW(t)$$

$x(t)+dx$

$$= g\Big(x(t)+\frac{dx}{2}, t+\frac{dt}{2}\Big)dW(t)$$

$$\underset{\substack{\text{Terme} \\ \text{bis} \sim dt}}{\overset{\text{Taylor}}{=}} \Big[g(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x,t} dx + \dots\Big]dW(t) + O(dt^{3/2})$$

mit $dx \approx g(x,t)\,dW$

$$= g(x,t)\,dW(t) + \underbrace{\frac{1}{2}\,g\frac{\partial g}{\partial x}\,\underbrace{d^2W(t)}_{\text{"="}dt}}_{\text{weiterer Driftterm}} + O(dt^{3/2}) \quad (11.14)$$

... "im quadrat. Mittel"

Beachte: $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ bei x, t

also: (11.13) mit (11.14)

$$\longrightarrow \boxed{dx(t) = [\underbrace{h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}}_{\text{rauschind. Drift}}] dt + g(x,t)\, dw \sqrt{dt}} \quad (11.15)$$

... SDG in Stratonovich-Interpretation
aber: in Ito-Form

- Kramers-Moyal-Koeffizienten:
  „Signaturen einer SDG"

$$D^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \langle [x(t+\tau) - x]^n \rangle \quad (11.16)$$

(i) <u>Ito-SDG</u>: lese direkt von (11.12) ab

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \quad (11.17)$$

$n=2$ $dx^2 = g^2 dt \, dt$

(ii) <u>Stratonovich-SDG</u>: aus (11.15) $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \quad (11.18)$$

- mehrdimensionale SDG: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x}_i = h_i(\underline{x},t) + g_{ij}(\underline{x},t)\, \Gamma_j(t) \\ &\text{mit } \langle \Gamma_j(t) \rangle = 0, \ \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = \delta_{ij}\, \delta(t-t') \end{aligned}} \quad (11.19)$$

(i) Ito-Interpretation:

$$\boxed{\begin{aligned} &dx_i(t) = h_i(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t)\, dw_j \sqrt{dt} \\ &\quad \text{mit } \langle dw_i \rangle = 0 \\ &\quad\quad\quad \langle dw_i\, dw_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\longrightarrow D_i^{(1)}(\underline{x},t) = h_i(\underline{x},t) \\ &\quad\quad D_{ij}^{(2)}(\underline{x},t) = \frac{1}{2} g_{ik}(\underline{x},t)\, g_{jk}(\underline{x},t) \end{aligned}} \quad (11.20)$$

(ii) <u>Stratonovich-Interpretation</u>: o.B.

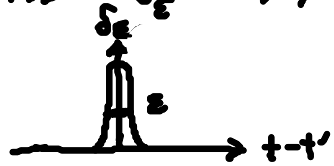
$$\boxed{\begin{aligned}
&dx_i(t) = h_i(x,t)\,dt + g_{ij}(x,t) \circ dw_j \sqrt{dt} \\
&\longrightarrow dx_i(t) = D_i^{(1)}(x,t)\,dt + g_{ij}(x,t)\, dw_j \sqrt{dt} \\
&\qquad \text{mit } \langle dw_i \rangle = 0 \\
&\qquad\qquad \langle dw_i\, dw_j \rangle = \delta_{ij} \\
&\longrightarrow D_i^{(1)}(x,t) = h_i(x,t) + \frac{1}{2} g_{kj}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(x,t) \\
&\qquad D_{ij}^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2} g_{ik}(x,t)\, g_{jk}(x,t)
\end{aligned}} \qquad (11.21)$$

- Anwendung der verschiedenen Interpretationen:

(i) physikal. Prozesse mit Korrelationen auf <u>kleiner</u> Zeitskala ε:

also: idealisiert $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta(t-t')\,,\; t-t' > \varepsilon$

Realität $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta_\varepsilon(t-t')\,,\; \forall\, t-t'$



$\longrightarrow$ Stratonovich-Interpretation!

Warum? vgl. Berechnung von $D^{(1)}$ in Kap. 10.3:

(1) $A = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t'} \Gamma(t')\Gamma(t'')\,dt''\,dt' \right\rangle = \frac{\tau}{2}$

mit $\langle \Gamma(t')\Gamma(t'') \rangle = \delta_\varepsilon(t'-t'')$

(2) über Wiener-Prozeß:

$$A_S = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t'} dW(t'')\, dW(t') \right\rangle$$

$$= \left\langle \int_t^{t+\tau} [\underline{W(t')} - W(t)]\, \underline{dW(t')} \right\rangle$$

$$\overset{(11.13)}{=} \left\langle \frac{W^2(t+\tau) - W^2(t)}{2} - W(t)[W(t+\tau) - W(t)] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(t+\tau-t) - t + t = \frac{\tau}{2}$$

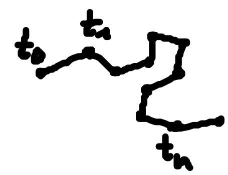
also: $A = A_S = \frac{\tau}{2}$!

aber $A_I = 0$

(ii) Biologie: oft diskrete Prozesse $\longrightarrow$ Ito-Interpretation

(iii) Analyse von Zeitreihen:

↳ Bsp: Zufallsweg eines Mikroorganismus:



$\rightarrow x(t_i)\,,\ i=0,\dots$

verwende einfachere Ito-Interpretation!

- Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x}_i + \gamma_{ij} x_j = \Gamma_i(t) \qquad i=1,\dots N \\ \langle \Gamma_i(t)\rangle = 0\,, \quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t')\rangle = q_{ij}\,\delta(t-t')\,, \quad q_{ij}=q_{ji} \end{array}}$$

... Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Bem: (1) lineare SDG

(2) q_{ij} ... Stärke des Rauschens

(3) $N=1$, $x \to v$ ... 1D-Brownsche Bewegung mit Trägheit

(4) $\gamma_{ij}=0$ ... Wiener-Prozeß!

Lösungen: ... s. H. Risken, The Fokker-Planck Equation

11.4 Die Fokker-Planck-Gleichung

- Motivation: DGl. für $P(x,t)$

mit $P(x,t)\,dx$ ... Wahrscheinl. System zur Zeit t in $[x, x+dx]$ anzutreffen

$\longrightarrow$ Berechnung von Momenten und Zeitkorrelationsfunktionen

$\hat{=}$ Meßgrößen des stochast. Prozesses

a) Kramers-Moyal-Entwicklung:

- Führe ein: Propagator = bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(x,t+\tau\,|\,x',t) \;\dots\; \text{für } x \text{ bei } t+\tau, \text{ wenn } x' \text{ bei } t \text{ mit Sicherheit vorliegt}} \qquad (11.23)$$

damit: $$P(x,t+\tau) = \int P(x,t+\tau\,|\,x',t)\,P(x',t)\,dx' \qquad (11.24)$$

NB: Markov-Prozeß! $P(x,t)$ hängt nur von unmittelbarer Vergangenheit ab!

· Ziel: Gl. für $\frac{\partial P}{\partial t}$!

(i) Berechne:

neue Variable: $x' \to \Delta$, $\Delta = x - x'$

$$P(x,t+\tau|x',t)\,P(x',t) = P(x+\Delta-\Delta,t+\tau|x-\Delta,t)\,P(x-\Delta,t)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Delta^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{P(x+\Delta,t+\tau|x,t)}_{\text{neue Fkt. in } x \text{ mit } \Delta \text{ als Index}} P(x,t) \Big] \quad (11.25)$$

feste Verschiebung

(ii) also:

$$P(x,t+\tau) \overset{(11.24)}{=} \int (11.25)\, dx'$$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots dx' \underset{\substack{\Delta = x-x' \\ d\Delta = -dx' \\ x \text{ fest}}}{=} -\int_{\infty}^{-\infty} \ldots d\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots d\Delta$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\int \Delta^n P(x+\Delta,t+\tau|x,t)\, d\Delta}_{n\text{.tes Moment } \langle [x(t+\tau)-x(t)]^n \rangle} P(x,t) \Big]$$

insbes. $\langle [\;]^0 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$! Normierung!

$$\longrightarrow P(x,t+\tau) = \underbrace{P(x,t)}_{\text{von } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\frac{\langle [x(t+\tau)-x(t)]^n \rangle}{n!}}_{= D^{(n)}(x,t)\tau + O(\tau^2)} P(x,t) \Big]$$

... Kramers-Moyal-Koeff. (10.26)

mit $\frac{P(x,t+\tau) - P(x,t)}{\tau} \xrightarrow[\tau \to 0]{} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = L_{KM}(x,t)\, P(x,t) \quad \text{mit } L_{KM} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[D^{(n)}(x,t) \ldots \right]} \quad (11.26)$$

... Kramers-Moyal-(Vorwärts)-Entwicklung

$\hat{=}$ „propagiert vorwärts in der Zeit!"

NB: Propagator $P(x,t|x',t')$ ... Lsg. von (11.26) mit Anfangsbed. $P(x,t') = \delta(x-x')$!

[bei t' liegt x' mit Sicherheit vor!]

- Berechnung von
  (i) Momenten: $\langle x^n(t)\rangle = \int x^n P(x,t)\,dx$ (11.27)

  (ii) Zeitkorrelationsfunktion:

$$\langle x(t)\,x(t')\rangle = \iint x x' \underbrace{P(x,t;x't')}_{\text{Wahrscheinl. } x \text{ bei } t \text{ und } x' \text{ bei } t' \text{ anzutreffen!}} dx\,dx'$$

$$= \iint x x' \; P(x,t|x',t')\,P(x',t')\,dx\,dx' \quad (11.28)$$

[vgl. Kap. 9.3]

N.B.: im therm. GG: $P(x',t') = P(x') \sim e^{-E(x')/k_BT}$

- Kramers-Moyal-(Rückwärts-)Entwicklung: o. B.

$$\boxed{\frac{\partial P(x,t|x',t')}{\partial t'} = -L^+_{KM}(x',t')\,P(x,t|x',t') \quad \text{mit adj. Operator: } L^+_{KM}(x',t') = \sum_{n=1}^{\infty} D^{(n)}(x',t')\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n} \quad (11.29)$$

... „propagiert rückwärts in der Zeit!"

N.B.: L^+_{KM} adjungiert zu L_{KM} aus (11.26)!

Beweis: Berechne

$$\langle g(x)\,|\,L_{KM}\,|\,f(x)\rangle$$

$$\xrightarrow[\text{Summand}]{\text{ein}} \langle g(x)\,|\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^n(x)\,|\,f(x)\rangle$$

$$= \int g(x)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^{(n)}(x)\,f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[g(x)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} D^{(n)}(x)\,f(x)\right]dx}_{=0 \text{ mit } „g(\pm\infty)=0"}$$

$$+ \int\left[\frac{\partial}{\partial x}g(x)\right]\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} D^{(n)}(x)\,f(x)\,dx$$

$$\vdots$$

$$= \int\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n g(x)\right] D^{(n)}(x)\,f(x)\,dx \quad \text{qed}$$