② „Lex secunda" bzw. 2. Newton'sche Axiom

Die Beschleunigung eines Körpers ist proportional zur Gesamtkraft $\underline{F}$, die auf den Massenpunkt wirkt.
Der Proportionalitätsfaktor ist die (träge) Masse m

Zum Begriff „träge Masse"

aus der Alltagserfahrung: Wirkung der Kraft ist vom Material abhängig! Je nach Material wird der Kraft ein Trägheitswiderstand entgegengesetzt
→ „träge Masse"

Axiom ② in Formeln

$$\underset{\text{Kraft}}{\underline{F}} = m\,\underline{a} = m\,\underline{\ddot{r}} \qquad (*)$$

Newton'sche Bewegungsgleichung (BWGL)

Bemerkungen

- (*) setzt voraus, dass die Masse m nicht von der Zeit abhängt!

  z.B. nicht erfüllt in einer Rakete!

  $\rightarrow$ allgemeiner: $\underline{F} = \dot{\underline{p}}$ (Impuls $\underline{p} = m\dot{\underline{r}} = m\underline{v}$)

- Rein mathematisch

  (*) ist ein System aus Differentialgleichungen!

  $\underline{F}$, $\underline{a}$ haben jeweils 3 Komponenten

  $\rightarrow$ 2. Ordnung in der Zeit!

  Aus der MMP-VL wissen wir: Für solche Systeme gibt es Lösungen für vorgegebene Anfangsbedingungen $\underline{r}(0)$, $\dot{\underline{r}}(0)$

  Zeit $t=0$

- Zum Begriff der Kraft $\underline{F}$

allgemein haben Kräfte die Form $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t)$

Beispiele für Kräfte:

i) Gewichtskraft (Schwerkraft), die ein Körper dicht an der Erdoberfläche erfährt:

$$\underline{F} = m_s \underline{g} \quad \text{mit} \quad \underline{g} = (0,0,-g)$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

„Erdbeschleunigung"

m_s: „schwere Masse"

Erfahrung zeigt (Galilei-Experiment): alle Körper fallen gleich schnell

Proportionalitätsfaktor: „schwere Masse"

man findet: $m_s = m$

ii) Reibungskraft

$$\underline{F} = -\underbrace{\gamma(\underline{v})}_{\text{Reibungs„Konstante"}} \overset{\dot{\underline{r}}}{\underline{v}}$$

allgemeiner Ansatz für Reibung

meist geht man davon aus, daß $\gamma(\underline{v}) = \gamma = \text{const}$

„Stoke'sche Reibung"

Reibungskraft geschwindigkeitsabhängig!

→ „dissipative"

iii) <u>Lorentzkraft</u>

$$\underline{F} = q\left(\underbrace{\underline{E}(\underline{r},t)}_{\text{elektr. Feld}} + \frac{1}{c}\underbrace{\underline{v}}_{\dot{\underline{r}}} \times \underbrace{\underline{B}(\underline{r},t)}_{\text{Magnetfeld}}\right)$$

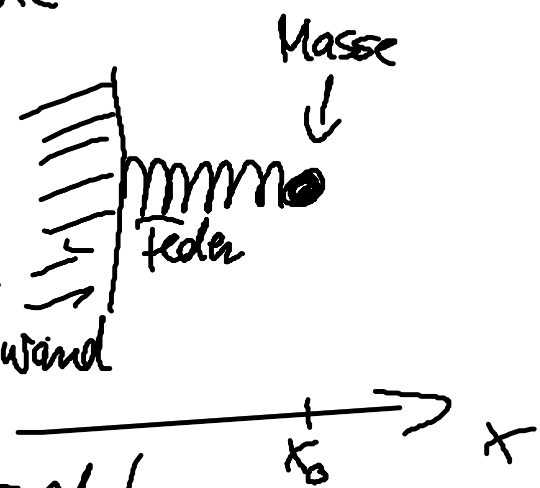
q: Ladung

→ Elektrodynamik

iv) Hook'sches Gesetz:

<u>Federkraft</u>

$$\underline{F} = -k(x-x_0)\underline{\hat{e}}_x$$



hängt nur vom Ort ab!

Die genannten vier Beispiele sind sogenannte <u>Elementarkräfte</u>.

Wichtig sind außerdem die Kräfte zwischen zwei Körpern! $\underline{F}_{ij}$: Kraft von Teilchen j auf Teilchen i

$i,j = 1,\dots,N$

③ „Lex tertia", 3. Newton'sches Axiom:

Die Wirkung zweier Körper aufeinander ist stets $\underbrace{\text{gleich}}_{\text{betragsmäßig}}$ und von entgegengesetzter Richtung

In Formeln: $\underset{\text{Kraft von 2 auf 1}}{\underline{F}_{12}} = -\underset{\text{Kraft von 1 auf 2}}{\underline{F}_{21}}$

„actio gegengleich reactio"

Beispiele

i) Gravitationskraft zwischen 2 Körpern der Massen m_1 und m_2

$$\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

$$\text{mit } \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$$

„Gravitationskonstante"

$\overbrace{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}^{\underline{r}_{12}}$: Verbindungsvektor der beiden Massen

$|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$: Abstand " " "

„Zentralkraft"

man kann schreiben: $\underline{F}_{12} = f(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \cdot \underline{r}_{12}$

mit $f(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}$

Die Gravitationskraft wirkt immer als anziehende Kraft

$$\underline{F}_{21} = -\gamma \frac{m_2 m_1}{|\underline{r}_2-\underline{r}_1|^3} \underbrace{(\underline{r}_2-\underline{r}_1)}_{-(\underline{r}_1-\underline{r}_2) = -\underline{r}_{12}}$$

$$= -\underline{F}_{12}$$

ii) Coulombkraft zwischen 2 geladenen Körpern mit Ladungen $q_1 = z_1 e$ und $q_2 = z_2 e$

e: Elementarladung

$$\underline{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1-\underline{r}_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}$$

- Coulombkraft hat dieselbe Abstandsabhängigkeit wie die Gravitationskraft!
- Coulombkraft ist ebenfalls Zentralkraft!

$$\underline{F}_{12} = f(r_{12})\, \underline{r}_{12}$$

$$\text{mit } f(r_{12}) = \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

$$(r_{12} = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$$

- erfüllt actio gegengleich reactio

Weitere Beispiele für Zweiteilchenkräfte finden sich u.a. in der Welt der Elementarteilchen (Reichweite ist aber so gering daß in der klass. Mechanik vernachlässigbar!

Für die Kräfte auf einen Massenpunkt gilt Superpositionsprinzip

→ Kräfte addieren sich vektoriell

häufig man z.B. (in einem Vielteilchensystem aus N Teilchen)

$$\underset{\text{Kraft auf Teilchen } i}{\underline{F}_i} = \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} \underline{F}_{ij}}_{\text{„Wechselwirkungskräfte"}} + \underset{\text{(Reibung, Schwerkraft etc.)}}{\underline{F}_i^{\text{extern}}}$$

Die Anwesenheit von Zweiteilchenkräften führt sofort zu Kopplungen der BWGL!

z.B. $N=2$ $\quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12} + \underline{F}_1^{extern}$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_{21} + \underline{F}_2^{extern}$$

gekoppelte Differentialgleichungen!

I.2 Konservative Kräfte, Potential

Wir betrachten im Folgenden Kräfte der Form

$\underline{F}_i = \underline{F}(\underline{r}_i)$ d.h. keine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit oder der Zeit!

Nehme außerdem an, daß sich $\underline{F}_i$ darstellen läßt als $\underline{F}_i = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$

∇_i : Gradient bzgl. des Ortes von Teilchen i

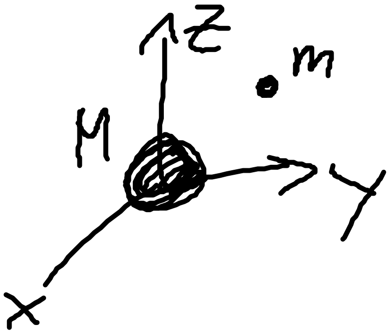
$$\nabla_i = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_i \\ \partial/\partial y_i \\ \partial/\partial z_i \end{pmatrix}$$

und $V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$ „skalares Potential"

Solche Kräfte nennt man <u>konservativ</u>!

Beispiel: Gravitationskraft, die von einer Masse M bei $\underline{r}=0$ auf eine Masse m wirkt:

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma\, m M \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$



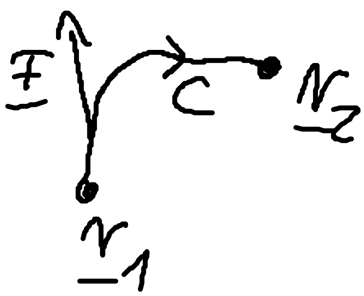
$$\Rightarrow V(\underline{r}) = -\gamma\, m M \frac{1}{r}$$

mit $r = |\underline{r}|$

check: $$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} = -\frac{\underline{r}}{r^3}$$ ok!

Andere, äquivalente Formulierungen für konservative Kräfte: „Die von einer konservativen Kraft geleistete Arbeit entlang eines Weges vom Ort $\underline{r}_1$ zum Ort $\underline{r}_2$ hängt nicht von der Form dieses Weges ab!

definiere dazu die Arbeit.



$$W_{21} = -\int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$$

Wegelement

Kurvenintegral

C : Weg

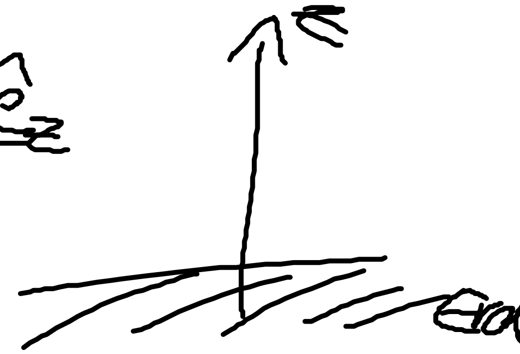
Arbeit, die aufgebracht (geleistet) werden muß, um einen Massenpunkt gegen die Kraft $\underline{F}$ von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ zu bringen!

Sei nun $\underline{F}$ konservativ, d.h. $\underline{F}(\underline{r}) = -\nabla V(\underline{r})$

$$W_{21} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot (-\nabla V(\underline{r})) = V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)!$$

$\rightarrow$ Es kommt also nur auf das Potential am Anfangs- und Endpunkt an, nicht aber auf den Weg C zwischen diesen Punkten!

z.B. Schwerkraft $\underline{F} = -mg\hat{\underline{e}}_z$



$$\underline{F} = -\nabla(mgz)$$

$$W_{21} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot(-mg\hat{\underline{e}}_z)$$

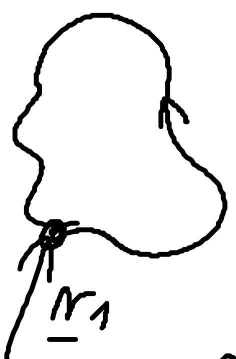
$$= +\int_{z_1}^{z_2} dz\,\nabla(mgz) = mg(z_2 - z_1)$$

Folgerung:

Für konservative Kräfte gilt

$$\oint_{\text{geschlossenes Wegintegral}} d\underline{r}\cdot F(\underline{r}) = 0 \quad !$$

$$\left(= V(\underline{r}_1) - V(\underline{r}_1)\right)$$



Schließlich kann man eine konservative Kraft noch charakterisieren durch $\text{rot}\,\underline{F} = \nabla\times\underline{F} = 0$

Rotation!

„Begründung"

$$\underline{F} = -\nabla V(\underline{r})$$

Annahme: $$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_k}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_l} = \frac{\partial F_l}{\partial x_k}$$

l, k kartesische Indizes

$x_1 = x$
$x_2 = y$
$x_3 = z$

$$\text{rot}\,\underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

G

Oder:

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0 \quad (*)$$

$\underline{F}$ konservativ

Stoke'scher Integralsatz: $\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = \int_A d\underline{A} \cdot \mathrm{rot}\,\underline{F}$

Flächenintegral

Beispiele für nicht-konservative Kräfte:

- Reibungskräfte
- Lorentzkraft

$\left.\begin{matrix} \text{Reibungskräfte} \\ \text{Lorentzkraft} \end{matrix}\right\}$ geschwindigkeitsabhängig

„dissipativ"!

$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{F} = 0$ für konservative Kräfte