

② „Lex Secunda“ bzw. 2. Newton'sches Axiom

Die Beschleunigung eines Körpers ist proportional zur Gesamtkraft \underline{F} , die auf den Massenpunkt wirkt.

Der Proportionalitätsfaktor ist die (träge) Masse m

Zum Begriff „träge Masse“

aus der Alltagserfahrung: Wirkung der Kraft ist vom Material abhängig: Je nach Material wird der Kraft ein Trägheitswiderstand entgegengesetzt \rightarrow „träge Masse“

Axiom ② in Formeln

$$\underline{F} = m \underline{a} = m \underline{\ddot{r}} \quad (*)$$

Kraft

Newton'sche

Bewegungsgleichung (BWGC)

Bemerkungen

- \textcircled{F} setzt voraus, dass die Masse m nicht von der Zeit abhängt.

z.B. nicht erfüllt in einem Paket!

→ allgemeiner: $\underline{F} = \dot{\underline{p}}$

Impuls
($\underline{p} = m \dot{\underline{r}}$
 $= m \underline{v}$)

- Rein mathematisch

\textcircled{F} ist ein System aus Differentialgleichungen!

($\underline{F}, \underline{g}$ haben $\dot{\underline{r}}$ jeweils 3 Komponenten
→ 2. Ordnung in der Zeit!

Aus der HMP-VL wissen wir:
Für solche Systeme gibt es Lösungen für
vorgegebene Anfangsbedingungen $\underline{r}(0), \dot{\underline{r}}(0)$
↑
Zeit $t=0$

- Zum Begriff der Kraft \underline{F}

allgemein haben Kräfte die Form $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t)$

Beispiele für Kräfte:

i) Gewichtskraft (Schwerkraft), die ein Körper dicht an der Erdoberfläche erfährt.

$$\underline{F} = m_s \underline{g} \quad \text{mit} \quad \underline{g} = (0, 0, -g)$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

„Erdbeschleunigung“

m_s : „Schwere Masse“



Erfahrung zeigt (Galilei-Experiment):
alle Körper fallen gleich schnell
Proportionalität fällt: „Schwere Masse“

man findet: $m_s = m$

ii) Reibungskraft

$$\underline{F} = - \delta(\underline{v}) \underline{v}$$

allgemeiner Ansatz für Reibung
Reibungs„konstante“

meist geht man davon aus, daß $\delta(\underline{v}) = \delta = \text{const}$
„Stokes'sche Reibung“

Reibungskraft geschwindigkeit abhängig!

→ „dissipativ“

(ii) Lorentz Kraft elektr. Feld

$$\underline{F} = q \left(\underline{E}(\underline{r}, t) + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}(\underline{r}, t) \right)$$

↑ Ladung ↑ Magnetfeld
→ Elektrodynamik

iv) Hook'sches Gesetz:

Federkraft

$$\underline{F} = -k(x - x_0) \underline{e}_x$$

↑ Feder ↓ Masse

↑ Wind

↑ x_0 ↑ x

hängt nur von Ort ab!

Die genannten vier Beispiele sind sogenannte Elementarkräfte.

Wichtig sind außerdem die Kräfte zwischen zwei Körpern!

F_{ij} : Kraft von Teilchen j auf Teilchen i

$i, j = 1, \dots, N$

③ „Lex tertia“, 3. Newton'sches Axiom:

Die Wirkung zweier Körper aufeinander
 ist stets gleich und von entgegengesetzter Richtung
 betragsmäßig

In Formeln: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
 Kraft von 2 auf 1 Kraft von 1 auf 2
 „actio gegen gleich reactio“

Beispiele

i) Gravitationskraft zwischen 2 Körpern
 der Massen m_1 und m_2

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

mit $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
 „Gravitationskonstante“

$\underline{r}_1 - \underline{r}_2$: Vektor des Vektors der beiden Massen

$|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$: Abstand

„Zentralkraft“

man kann schreiben: $\vec{F}_{12} = f(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \cdot \underline{r}_{12}$

$$\text{mit } f(r_1 - r_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^3}$$

Die Gravitationskraft wirkt immer als anziehende Kraft

$$\begin{aligned} \underline{F}_{21} &= -\gamma \frac{m_2 m_1}{|r_2 - r_1|^3} \underbrace{(r_2 - r_1)}_{-(r_1 - r_2) = -r_{12}} \\ &= -\underline{F}_{12} \end{aligned}$$

ii) Coulombkraft zwischen 2 geladenen Körpern mit Ladungen $q_1 = z_1 e$ und $q_2 = z_2 e$
↑
Elementarladung

$$\underline{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3} \quad !$$

• Coulombkraft hat dieselbe Abstandsabhängigkeit wie die Gravitationskraft!

• Coulombkraft ist ebenfalls Zentralkraft!

$$\underline{F}_{12} = f(r_{12}) \frac{r_{12}}{r_{12}^3}$$

mit $f(r_{12}) = \frac{q_1 q_2}{(r_1 - r_2)^3}$
 $(r_{12} = |r_1 - r_2|)$

• erfüllt auch gegen gleiches r_{12}

Wirden Beispiele für Zweiteilchenkräfte finden sich
 u. a. in der Welt der Elementarteilchen
 (Reichweite ist aber so gering
 das in dem klass. Mechanik
 vernachlässigt werden!

Für die Kräfte auf einen Massenpunkt
 gilt Superpositionsprinzip

→ Kräfte addieren sich vektoriell

häufig man z.B. (in einem Vielteilchensystem
 aus N Teilchen

$$\underline{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \underline{F}_{ij} + \underline{F}_i^{\text{extern}}$$

Kraft auf Teilchen i ($j \neq i$) (Reibung, Schwerkraft etc.)

„Wechselwirkungs-
 Kräfte“

Die Anwesenheit von Zweiteilchenkräften führt selbst
 zu Kopplungen der B.W.G.!

z.B. $N=2$ $m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12} + \underline{F}_1^{\text{extern}}$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_{21} + \underline{F}_2^{\text{extern}}$$

gekoppelte Differentialgleichungen!

I.2 Konserverkräfte, Potential

Wir betrachten im Folgenden Kräfte der Form

$$\underline{F}_i = \underline{F}(\underline{r}_i) \quad \text{d.h. keine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit oder der Zeit!}$$

Nehme an, dass sich \underline{F}_i darstellen lässt als

$$\underline{F}_i = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$$

∇_i : Gradient bzgl. des Orts von Teilchen i

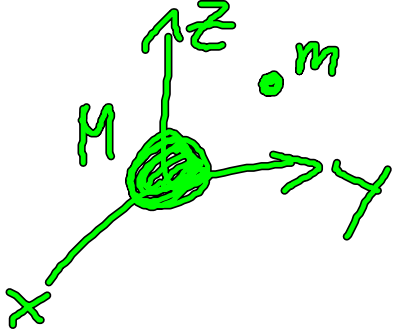
$$\nabla_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix}$$

und $V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$ „skalares Potential“

Solche Kräfte nennt man Konservative!

Beispiel: Gravitationskraft, die von einer Masse M bei $\underline{r}=0$ auf eine Masse m wirkt:

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma m M \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$



$$\Rightarrow V(\underline{r}) = -\gamma m M \frac{1}{r}$$

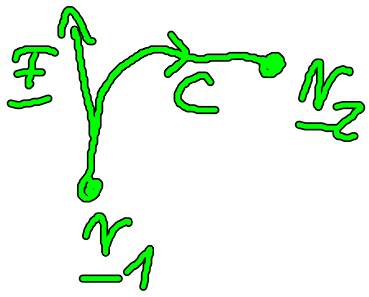
mit $r = |\underline{r}|$

check: $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r$

$$= -\frac{1}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = -\frac{\underline{r}}{r^3} \quad \text{ok!}$$

Andere, äquivalente Familien für konservative Kräfte: "Die von einer konservativen Kraft geleistete Arbeit entlang eines Weges von Ort \underline{r}_1 zum Ort \underline{r}_2 hängt nicht von der Form dieses Weges ab!"

definiere dazu die Arbeit.



$$W_{21} = - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$$

Wegelement
Kantenintegral
C: Weg

Arbeit, die aufgebracht (geliefert) werden muss, um einen Massenpunkt gegen die Kraft \underline{F} von \underline{r}_1 nach \underline{r}_2 zu bringen!

Sei nun \underline{F} konservativ, d.h. $\underline{F}(\underline{r}) = -\nabla V(\underline{r})$

$$W_{21} = - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot (-\nabla V(\underline{r})) = V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)!$$

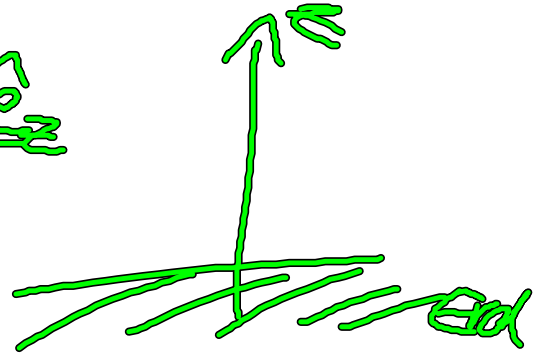
→ Es kommt also nur auf das Potential am Anfangs- und Endpunkt an, nicht aber auf den Weg C zwischen diesen Punkten!

z.B. Schwerkraft $\underline{F} = -mg\hat{e}_z$

$$\underline{F} = -\nabla(mgz)$$

$$W_{z1} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot (-mg\hat{e}_z)$$

$$= +\int_{z_1}^{z_2} dz(mgz) = mg(z_2 - z_1)$$

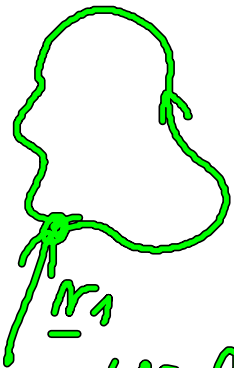


Folgerung:

Für konservative Kräfte gilt

$$\oint d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = 0 \quad !$$

geschlossenes
Wegintegral $(= V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1))$



Schließlich kann man eine
noch charakteristischer durch

Konservative Kraft
 $\text{rot } \underline{F} = \nabla \times \underline{F} = 0$
Rotation!

„Begründung“

$$\underline{F} = -\nabla V(\underline{r})$$

Annahme:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_k}$$

$$\rightarrow \frac{\partial F_k}{\partial x_l} = \frac{\partial F_l}{\partial x_k}$$

l, k Vertauschen
bedeutet

$$x_k = x$$

$$x_l = y$$

$$x_k = y$$

$$\text{rot } \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Oder:

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0 \quad \text{⊗}$$

F konservativ

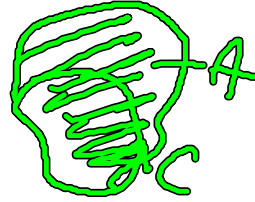
Stokes'scher Integralsatz:

$$\oint_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \int_A dA \cdot \operatorname{rot} \underline{F}$$

A
Rächenintegral

Beispiele für nicht-konservative Kräfte:

- Reibungskräfte
 - Lorentzkraft
- } geschwindigkeitsabhängig
"dissipativ"!



$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{F} = 0$
für konservative Kräfte