Konservative Kräfte, Potential

$$\underline{F}_i = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$$

$$W_{21} = -\int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\, \underline{F}(\underline{r})$$ Einteilchensystem

Arbeit

$$= V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)$$ wegunabhängig

$\underline{F}$ konservativ

$$\text{rot}\, \underline{F} = 0$$

Weitere Bemerkungen

i) Es gibt (natürlich!) auch konservative Zweiteilchen-Kräfte!

$$\underline{F}_{ij} = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$$ und $$\underline{F}_{ji} = -\nabla_j V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$$

$N=2$:
$$\underline{F}_{12} = -\nabla_1 V(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$$
$$\underline{F}_{21} = -\nabla_2 V(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$$

Damit $\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$ (actio gegengleich reactio)

muß gelten:
$$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = V(\underbrace{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}_{\text{Verbindungsvektor}})$$

$$\underline{F}_{12} = -\nabla_1 V = +\nabla_2 V$$
$$= -\underline{F}_{21}$$ o.k.!

(ii) Beispiele für nicht-konservative Kräfte

- Reibungskraft: $\underline{F}_i = -\gamma(|\underline{v}_i|)\,\underline{v}_i$
- Lorentzkraft: $\underline{F}_i = q_i\left(\underline{E} + \frac{\underline{v}_i}{c}\times\underline{B}\right)$

} geschwindigkeitsabhängig → dissipative

(iii) Begriff der Leistung

allgemeine Definition der Arbeit:

$$W_{21} = -\int_{\underline{r}_1,\,C}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)$$

Leistung: Arbeit pro Zeiteinheit

Explizit: Wir parametrisieren das Kurvenintegral (genauer: die Kurve C)

$\underline{r} = \underline{r}(\alpha)$ α Parameter, z.B. $\alpha = t$ Zeit

$d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{d\alpha}\,d\alpha$, z.B. $d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{dt}\,dt = \dot{\underline{r}}\,dt$

Wegelement

$$\Rightarrow W = -\int^{t} \underbrace{\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t')\,\dot{\underline{r}}(t')}_{\text{„momentane Leistung"}}\,dt'$$

geleistete Arbeit zur Zeit t ... t_0

Leistung $P = -\underline{F}(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t) \cdot \underline{\dot{r}}$

$= \frac{dW}{dt}$ Arbeit pro Zeit

I.3. Erhaltungssätze in Vielteilchensystemen

Betrachte System aus N Massenpunkten

$$\underline{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \underline{F}_{ij} + \underline{F}_i^{\text{extern}}$$

Vernachlässigung von Dreikörper-, Vierkörper-, ... Kräften!

Definiere:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \text{Gesamtmasse}$$

$$\underline{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \quad \text{Schwerpunkt}$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \underline{\dot{r}}_i}_{p_i} = \sum_{i=1}^{N} p_i \quad \text{(Linearer) Gesamtimpuls}$$

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times p_i) = \sum_{i=1}^{N} l_i \quad \text{Gesamt-Drehimpuls}$$

Wir zeigen jetzt:
unter bestimmten Bedingungen bleiben diese Größen „erhalten", d.h. sie ändern sich nicht mit der Zeit

a) Gesamtimpuls

$$\underline{\dot{P}} = \frac{d\underline{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\ddot{r}}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{\text{extern}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij}}$$

Newton'sche BWGL

In der Doppelsumme taucht jedes Paar zweimal auf, z.B. $\underline{F}_{12} + \underbrace{\underline{F}_{21}}_{-\underline{F}_{12}} = 0$ actio gegengl. reactio!

$$\Rightarrow \underline{\dot{P}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{\text{extern}}$$

In einem System ohne äußere (externe) Kräfte gilt also $\underline{\dot{P}} = 0$, d.h. $\underline{P} = \text{const}$ „Impulserhaltung"

Umformulierung:

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\dot{r}}_i = M \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \underline{\dot{r}}_i$$

$$= M \underline{\dot{R}}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{P}} = M \underline{\ddot{R}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{\text{extern}}$$

ohne äußere Kräfte gilt also $M\,\underline{\ddot{R}} = 0$

d.h. der Schwerpunkt ist in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig

„Schwerpunktsatz"

b) Drehimpuls

$$\underline{\dot{L}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\cancel{\underline{\dot{r}}_i \times \underline{p}_i} + \underline{r}_i \times \underline{\dot{p}}_i\right)$$

$$\underline{p}_i = m_i \underline{\dot{r}}_i$$

$$\underline{\dot{L}} = \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{\dot{p}}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) = \underline{N}$$

BWGL

Gesamt — Drehmoment

Annahme: $\underline{F}_i = \underline{F}_i^{\text{extern}} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \underline{F}_{ij}$

Zentralkraft! $\underline{F}_{ij} = f(\underbrace{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}_{r_{ij}})\, \hat{\underline{r}}_{ij}$

Einheitsvektor in Richtung des Verbindungsvektors $\underline{r}_i - \underline{r}_j$

$$\Rightarrow \underline{\dot{L}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{\text{extern}}\right)$$

betrachte Doppelsumme:

z.B. $\underline{r}_1 \times \underline{F}_{12} + \underline{r}_2 \times \underbrace{\underline{F}_{21}}_{= -\underline{F}_{12}}$

$= (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{F}_{12}$ $\qquad \underline{F}_{12}$ Zentralkraft!

$= (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underbrace{\frac{f(r_{12})}{r_{12}}}_{\text{skalar}} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = 0\,!$

$\Rightarrow$ Doppelsumme verschwindet

$$\Rightarrow \dot{\underline{L}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{\text{extern}}\right) = \underline{N}^{\text{extern}}$$

externes Drehmoment

Konsequenz:
In Abwesenheit äußerer Kräfte bleibt der Drehimpuls erhalten, falls nur Zentralkräfte vorliegen!

c) Energie

betrachte nun speziell System mit konservativen Kräften

Startpunkt: Newton'sche BWG

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) - \nabla_i V^{\text{extern}}(\underline{r}_i)$$

multipliziere die Gleichung mit $\dot{\underline{r}}_i$ und summiere über i

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i \ddot{\underline{r}}_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \dot{\underline{r}}_i \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j)$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \nabla_i V^{\text{extern}}(\underline{r}_i)$$

Umformulierung der einzelnen Terme:

Linke Seite: benutze $\frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}_i)^2 = 2\dot{\underline{r}}_i \ddot{\underline{r}}_i$

Rechte Seite 2. Term: $\frac{d}{dt} V^{\text{extern}}(\underline{r}_i(t)) = \nabla_i V^{\text{extern}} \cdot \dot{\underline{r}}_i$

Kettenregel!

Rechte Seite 1. Term

$$\frac{d}{dt} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = \nabla_i V \cdot \dot{\underline{r}}_i - \nabla_j V \cdot \dot{\underline{r}}_j$$

$$= -\underline{F}_{ij} \cdot \dot{\underline{r}}_i + \underbrace{\underline{F}_{ji}}_{-\underline{F}_{ij}} \cdot \dot{\underline{r}}_j$$

actio gegengleich reactio

$$= -\underline{F}_{ij} \cdot (\dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_j)$$

~~Für jedes Paar in der Doppelsumme:~~

$$\cancel{-\underline{F}_{12} (\dot{\underline{r}}_1 + \dot{\underline{r}}_2) = \ldots\ldots = \quad i=1,\ j=2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = +2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i \right)^2$$

$$= \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) - \sum_{i=1}^{N} V^{extern}(\underline{r}_i) \right)$$

identifiziere:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} = T$$ kinetische Energie des Gesamtsystems

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) + \sum_{i=1}^{N} V^{\text{extern}}(\underline{r}_i) = V$$ potentielle Energie des Gesamtsystems

$\Rightarrow$ Wir erhalten

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{d}{dt} V$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\underbrace{T+V}_{E \text{ Gesamtenergie}}) = 0 \quad !$$

$\Rightarrow$ In einem konservativen System bleibt die Energie erhalten

Wenn außerdem V^{extern} und damit F_i^{extern} verschwindet

$\Rightarrow$ Erhaltung von $\underline{P}$, $\underline{L}$ ← falls Zentralkraft Zweikörperkräfte

„Integrale der Bewegung"

I.4. Zweikörperproblem mit Zentralkraft

$N=2$, keine äußere Kräfte

$$\underline{F}_{12} = f(r_{12})\,\hat{\underline{r}}_{12}$$

a) Reduzierung auf 1-Teilchen Problem

Newton'sche BWGL:
$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12}$$
$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$$

$\Rightarrow$ 6 Differentialgleichungen

Keine äußeren Kräfte!
$\Rightarrow$ Schwerpunktsatz: $\underline{R}(t) = \underline{R}(0) + \underline{P}\cdot t$
($\ddot{\underline{R}}=0$) $\qquad \underline{P} = \text{const}$

$\Rightarrow$ $\underline{R}(t)$ bestimmbar, falls
$\underline{R}(0)$ und $\underline{P}$ bekannt

$\Rightarrow$ Die eigentliche Dynamik steckt also in der Relativbewegung!

$$\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

zugehörige BWGL

$$\ddot{\underline{r}}_{12} = \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\underline{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\underset{\overset{\shortparallel}{-\underline{F}_{12}}}{\underline{F}_{21}}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \underline{F}_{12}$$

führe ein: $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ mit $M = m_1 + m_2$

einsetzen:

$$\ddot{\underline{r}}_{12} = \frac{M}{m_1 m_2} \underline{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \underline{F}_{12}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\mu \ddot{\underline{r}}_{12} = \underline{F}_{12}}$$

μ heißt reduzierte Masse

↪ Reduktion auf das effektive Einteilchenproblem (Bewegung einer Masse μ um Kraftzentrum bei $\underline{r}_2$)

„Abtrennung" der Schwerpunktsbewegung