

Konservative Kräfte, Potential

$$\underline{F}_i = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$$

$$\text{Arbeit} \quad W_{21} = - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$$

Einfeldensystem

$$= V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)$$

wegunabhängig

\underline{F} konservativ

$$\text{rot } \underline{F} = 0$$

Weitere Bemerkungen

i) Es gibt (natürlich!) auch konservative Zweifeldenskräfte!

$$\underline{F}_{ij} = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) \quad \text{und} \quad \underline{F}_{ji} = -\nabla_j V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$$

$$N=2 : \quad \underline{F}_{12} = -\nabla_1 V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \\ \underline{F}_{21} = -\nabla_2 V(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$$

Damit $\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$ (achse gegengläufige rechte),
muß gelten:

$$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

Verbindungsvektor

$$\underline{F}_{12} = -\nabla_1 V = +\nabla_2 V \\ = -\underline{F}_{21}$$

ok!

ii) Beispiele für nicht-konservative Kräfte

- Reibungskraft: $\underline{F}_i = -\gamma(|\underline{v}_i|) \underline{v}_i$
 - Lorentzkraft: $\underline{F}_i = q_i (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v}_i \times \underline{B})$
- } potentiell
abwärts
→ dissipativ

iii) Begriff der Leistung

allgemeine Definition der Arbeit.

$$W_{21} = - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

Leistung: Arbeit pro Zeiteinheit

Explizit: Wir parametrisieren das Kurvenintegral
(genauer: die Kurve C)

$\underline{r} = \underline{r}(\alpha)$ α Parameter, z.B. $\alpha = t \in [t_0, t_1]$

Wegement $d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{d\alpha} d\alpha$, z.B. $d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{dt} dt = \underline{\dot{r}} dt$

$$\Rightarrow W = - \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t) \underline{\dot{r}}(t')}_{\text{"momentane Leistung"}} dt'$$

geleistete Arbeit zur Zeit t

Leistung $P = - \underline{F}(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t) \cdot \underline{\dot{r}}$
 $= \frac{dW}{dt}$

Arbeit pro
Zeit

I.3. Erhaltungssätze in Vielteilchensystemen

Betrachte System aus N Massenpunkten

$$\underline{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{F}_{ij} + \underline{F}_i^{\text{extern}}$$

Vernachlässigung von
Dipol-, Quadrupol-, ...
Momenten!

Definiere:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{Gesamtmasse}$$

$$\underline{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \quad \text{Schwerpunkt}$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^N \underbrace{m_i \underline{\dot{r}}_i}_{\underline{p}_i} = \sum_{i=1}^N \underline{p}_i \quad \text{(Linear) Gesamtimpuls}$$

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i \times \underline{p}_i) = \sum_{i=1}^N \underline{l}_i \quad \text{Gesamt-Drehimpuls}$$

Wir zeigen jetzt, unter bestimmten Bedingungen bleiben diese Größen "erhalten", d.h. sie ändern sich nicht mit der Zeit

a) Gesamtimpuls

$$\underline{\dot{P}} = \frac{d\underline{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{\ddot{r}}_i$$

$$= \sum_{i=1}^N \underline{F}_i = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{\text{extern}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij}}_{\substack{\text{Newton'sche} \\ \text{BWGC}}}$$

In der Doppelsumme taucht jedes Paar zweimal auf,

$$\text{z.B. } \underline{F}_{12} + \underline{F}_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{P}} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{\text{extern}} \quad \underline{F}_{12} \quad \text{actio gegenl. reactio}$$

In einem System ohne äußere (externe) Kräfte gilt also $\underline{\dot{P}} = 0$, d.h. $\underline{P} = \text{const}$ „Impulserhaltung“

Umformulierung:

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{r}}_i = M \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \underline{\dot{r}}_i = M \underline{\dot{R}}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{P}} = M \underline{\ddot{R}} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{\text{extern}}$$

..

ohne äußere Kräfte gilt also $\sum \underline{F} = 0$
 d.h. der Schwerpunkt ist in Ruhe oder bewegt
 sich gleichförmig
 „Schwerpunktsatz“

b) Drehimpuls

$$\underline{L} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \underline{r}_i \times \underline{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\underline{r}}_i \times \underline{p}_i + \underline{r}_i \times \dot{\underline{p}}_i \right)$$

$(m_i \dot{\underline{r}}_i)$

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i \times \underline{p}_i)$$

$$\xrightarrow{\text{BWL}} \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) = \underline{N}$$

Gesamt-Drehmoment

Annahme: $\underline{F}_i = \underline{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \underline{F}_{ij}$

← Zentralkraft! $\underline{F}_{ij} = f(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|) \hat{\underline{r}}_{ij}$

r_{ij} ↑

Einheitsvektor in
 Richtung des
 Verbindungsvektors
 $\underline{r}_i - \underline{r}_j$

$$\rightarrow \underline{L} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^N (N_i \times \underline{F}_i^{\text{extern}})$$

betrachte Doppelsumme:

$$\text{z.B. } N_1 \times \underline{F}_{12} + N_2 \times \underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$$

$$= (N_1 - N_2) \times \underline{F}_{12} \quad \underline{F}_{12} \text{ Zentralkraft!}$$

$$= (N_1 - N_2) \times \underbrace{f(N_{12})}_{\text{Skalar}} (N_1 - N_2) = 0!$$

\Rightarrow Doppelsumme verschwindet

$$\Rightarrow \underline{\dot{L}} = \sum_{i=1}^N (N_i \times \underline{F}_i^{\text{extern}}) = \underline{N}^{\text{extern}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{externes} \\ \text{Drehmoment} \end{array}$$

Konsequenz:

In Abwesenheit äußerer Kräfte
bleibt der Drehimpuls erhalten,
falls nur Zentralkräfte vorliegen!

c) Energie

betrachte nun speziell System mit konservativen
Kräften

Startpunkt: Newton'sche BWG

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) - \nabla_i V^{\text{extern}}(\underline{r}_i)$$

multipliziere die Gleichung mit \underline{r}_i
und summiere über i

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \ddot{\underline{r}}_i &= - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{r}_i \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \nabla_i V^{\text{extern}}(\underline{r}_i) \end{aligned}$$

Umformulierung der einzelnen Terme:

Linke Seite: benutze $\frac{d}{dt} (\underline{r}_i)^2 = 2 \underline{r}_i \dot{\underline{r}}_i$

Rechte Seite 2. Term: $\frac{d}{dt} V^{\text{extern}}(\underline{r}_i) = \nabla_i V^{\text{extern}} \cdot \dot{\underline{r}}_i$
Kettenregel!

Rechte Seite 1. Term

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) &= \nabla_i V \cdot \dot{\underline{r}}_i \\ &\quad - \nabla_j V \cdot \dot{\underline{r}}_j \\ &= -\underline{F}_{ij} \cdot \dot{\underline{r}}_i + \underline{F}_{ji} \cdot \dot{\underline{r}}_j \\ &= -\underline{F}_j \cdot (\dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_j) \end{aligned}$$

achio gegengleich
radio

Für jedes Paar in der Doppelsumme:

~~$$-\underline{F}_{12} (\dot{\underline{r}}_1 + \dot{\underline{r}}_2) = \dots =$$~~

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = +2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i \right)^2 \\ = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) - \sum_{i=1}^N V_{\text{extern}}(\underline{r}_i) \right) \end{aligned}$$

identifizier:

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} = T \quad \text{kinetische Energie des Gesamtsystems}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} V(r_i - r_j) + \sum_{i=1}^N V^{\text{extern}}(r_i) = V \quad \text{potenzielle Energie des Gesamtsystems}$$

→ Wir erhalten

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{d}{dt} V$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (T+V) = 0 \quad !$$

E Gesamtenergie

⇒ In einem konservativen System bleibt die Energie erhalten

Wenn außerdem V^{extern} und damit F_i^{extern} verschwindet

→ Erhaltung von \underline{P} , \underline{L}
„Integrale der Bewegung“ ← falls Zweiteilchenheit Zweikörperheit

I.4. Zweikörperproblem mit Zentralkraft

$N=2$, keine äußere Kraft

$$\underline{F}_{12} = f(r_{12}) \hat{\underline{r}}_{12}$$

a) Reduzierung auf 1-Teilchen Problem

Newton'sche BWGL: $m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12}$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$$

→ 6 Differentialgleichungen

Keine äußere Kraft!

⇒ Schwerpunktssatz: $\underline{r}(\epsilon) = \underline{r}(0) + \underline{p} \cdot \epsilon$
($\underline{r} = 0$) $\underline{p} = \text{const}$

⇒ $\underline{r}(\epsilon)$ bestimmbar, falls
 $\underline{r}(0)$ und \underline{p} bekannt

⇒ Die eigentliche Dynamik steckt also
in der Relativbewegung!

$$\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

Zugehörige BWGL

$$\ddot{\underline{r}}_{12} = \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \underline{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \underline{F}_{21}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \underline{F}_{12}$$

Führe ein: $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ mit $M = m_1 + m_2$

einsetzen:

$$\underline{\ddot{r}}_{12} = \frac{M}{m_1 m_2} \underline{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \underline{F}_{12}$$

\Leftrightarrow

$$\mu \underline{\ddot{r}}_{12} = \underline{F}_{12}$$

μ heißt reduzierte Masse

→ Reduktion auf das effektive Ein-Teilchenproblem
(Bewegung einer Masse μ um
Kraftzentrum bei \underline{r}_2)

„Abtrennung“ der Schwerpunktbewegung