Zur Doppelsumme beim ~~de~~ Beweis der Energieerhaltung im konservativen System:

$$\frac{d}{dt} V(\underbrace{\underline{r}_i - \underline{r}_j}_{\underline{r}_{ij}(t)}) = \nabla_{ij} V(\underline{r}_{ij}) \cdot \dot{\underline{r}}_{ij} = \nabla_i V(\underline{r}_{ij}) \cdot \dot{\underline{r}}_{ij}$$

$$\nabla_{ij} = \nabla_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \frac{d}{dt} V(\underline{r}_{ij}) = -\sum_{i,j} \underline{F}_{ij} \cdot \dot{\underline{r}}_{ij}$$

betrachte z.B. $i,j = 1,2$

$$\underline{F}_{12} \cdot \dot{\underline{r}}_{12} + \underline{F}_{21} \cdot \dot{\underline{r}}_{21} = \ldots = 2\underline{F}_{12} \dot{\underline{r}}_1 + 2\underline{F}_{21} \dot{\underline{r}}_2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i,j} V(\underline{r}_{ij}) = 2 \sum_{ij} \nabla_i V(\underline{r}_{ij}) \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

Reduzierung des 2-Teilchenproblems auf effektives Einteilchenproblem

$M = m_1 + m_2$ Gesamtmasse, $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ „reduzierte Masse"

$\Rightarrow$ man erhält: $\boxed{\mu \ddot{\underline{r}}_{12} = \underline{F}_{12}}$ BWGL für Relativbewegung

Schwerpunktsbewegung $\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

$$\underline{R}(t) = \underline{R}(0) + M^{-1}\underline{P}\cdot t \qquad (\underline{P} = \text{const})$$

da keine äußeren Kräfte!

b) Einteilchenproblem

unter der Annahme, daß $\underline{F}_{12}$ Zentralkraft

betrachte Drehimpuls.

$$\underline{L} = \underline{r}_1 \times m_1 \dot{\underline{r}}_1 + \underline{r}_2 \times m_2 \dot{\underline{r}}_2 \quad \text{Gesamtdrehimpuls}$$

umschreiben: $\underline{R} = \frac{m_1}{M}\underline{r}_1 + \frac{m_2}{M}\underline{r}_2$, $\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

auflösen $\underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{M}\underline{r}_{12}$

$\underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{M}\underline{r}_{12}$

$$\underline{L} = \underline{r}_1 \times m_1 \dot{\underline{R}} + \underline{r}_1 \times \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\underline{r}}_{12} + \underline{r}_2 \times m_2 \dot{\underline{R}} + \underline{r}_2 - \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\underline{r}}_{12} = \ldots = M\underline{R}\times\dot{\underline{R}} + \mu\,\underline{r}_{12}\times\dot{\underline{r}}_{12}$$

$\underline{L}_S = M\underline{R}\times\dot{\underline{R}}$ Schwerpunkt-Drehimpuls

$\underline{L}_{rel} = \mu\,\underline{r}_{12}\times\dot{\underline{r}}_{12}$ Relativ-Drehimpuls

$\underline{L} = \underline{L}_S + \underline{L}_{rel}$ auch hier (wie bei BWG) Abtrennung der Schwerpunktbewegung!

Wir wissen:

$$\dot{\underline{L}} = 0$$

(Keine äußeren Drehmoment ~~da~~ und $\underline{F}_{12}$ Zentralkraft!)

betrachte:

$$\dot{\underline{L}}_S = M \underbrace{\dot{\underline{R}} \times \dot{\underline{R}}}_{0} + M \underline{R} \times \underbrace{\ddot{\underline{R}}}_{0} = 0$$

$\underline{L}_S$ ist Erhaltungsgröße!

betrachte Relativ-Drehimpuls:

$\Rightarrow \dot{\underline{L}}_{rel} = 0$, da $\dot{\underline{L}} = 0$ und $\dot{\underline{L}}_S = 0$

andererseits: $\underline{L}_{rel} = \mu\, \underline{r}_{12} \times \dot{\underline{r}}_{12}$

$\Rightarrow$ $\underline{L}_{rel}$ steht senkrecht auf $\underline{r}_{12}$ und $\dot{\underline{r}}_{12}$ für alle Zeiten t!

↳ mit Erhaltung von $\underline{L}_{rel}$ folgt:

Die Relativbewegung verläuft zu allen Zeiten in einer festen, durch $\underline{r}_{12}$ und $\dot{\underline{r}}_{12}$ bestimmten Ebene senkrecht zu $\underline{L}_{rel}$!

Lege nun fest: $\underline{L}_{rel} \parallel \hat{\underline{z}}$ ← Einheitsvektor in z-Richtung

d.h. $\underline{L}_{rel} = (0, 0, L_{rel})$

$$\Rightarrow \quad \underline{r}_{12}(t) = (x(t), y(t), 0)$$
$$\dot{\underline{r}}_{12}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0)$$

Wir benötigen nur noch zwei Koordinaten!

Führe noch Polarkoordinaten ein:

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t) \; ; \; y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \quad ; \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\underline{L}_{rel} = (0, 0, L_{rel})$$

$$L_{rel} = \mu\left(\underline{r}_{12}(t) \times \dot{\underline{r}}_{12}(t)\right)_z = \mu(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

(benutzt: $(\underline{a} \times \underline{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$)

$$\Rightarrow L_{rel} = \mu\,(r\cos\varphi\,\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\, r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$- \dot{r}\cos\varphi\, r\sin\varphi + r\sin\varphi\,\dot{\varphi}\, r\sin\varphi)$$
$$= \mu r^2 \dot{\varphi}\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$
$$+ \mu r \dot{r}\,\underbrace{(\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)}_{0}$$
$$= \mu r^2 \dot{\varphi}$$

$$\dot{\underline{L}}_{rel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{L}_{rel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu r^2 \dot{\varphi} = \overset{L_{rel}}{\overset{\downarrow}{\text{const}}}$$

Das ist eine Bestimmungsgleichung (Differentialgleichung) für die Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$

Eine zweite Gleichung ergibt sich aus der Energieerhaltung!

$$E = T + V = \frac{m_1}{2}\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\underline{r}}_2^2 + V(r_{12})$$

$$= \ldots = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2}_{\text{kinetische Energie des Schwerpunkts}} + \underbrace{\frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}_{12}^2 + V(r_{12})}_{\text{Energie der Relativbewegung}}$$

Umschreiben auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten

auch hier: Entkopplung in Schwerpunkt- und Relativ-Beiträge

Benutze: $\dot{E} = 0$ (Erhaltung der Gesamtenergie, da System konservativ!)

$$\dot{E}_S = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2\right)}_{E_S} = \frac{M}{2}\,2\,\dot{\underline{R}}\cdot\ddot{\underline{R}} = 0$$

$\Rightarrow E_{rel} = \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}_{12}^2 + V(r_{12})$ ist ebenfalls Erhaltungsgröße!

umschreiben mit Polarkoordinaten $(\dot{E}_{rel} = 0)$

$$E_{rel} = \frac{\mu}{2}\left((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2\right) + V(r_{12})$$

$$= \dots = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

Verwende nun: $L_{rel} = \mu r^2 \dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{E_{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2} + V(r)}$$

man nennt: $\frac{\mu}{2}\dot{r}^2$: kinetische Energie der Radialbewegung

$\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2} = \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\varphi}^2$: Zentrifugalbarriere

Grund für diesen Namen

radialer Einheitsvektor

$$\underline{F} = -\nabla_r\left(\frac{\mu}{2} r^2 \dot{\varphi}^2\right) = -\mu r \dot{\varphi}^2 \hat{\underline{r}}$$

$$= -\mu \omega^2 \underline{r}$$

s. Kapitel I.1 $\to$ Zentrifugalbeschleunigung

mit ω : Winkelgeschwindigkeit

c) Lösung des Einteilchenproblems

→ Bestimmung von $r(t)$ und $\varphi(t)$ für Potentiale der Form $V(r)$

Ausgangspunkt:

① $L_{rel} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$

② $E_{rel} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const}$

mit $V_{eff} = V(r) + \frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}$ effektive Potential

aus ①: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{rel}}{\mu (r(t))^2}$

aus ②: $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{rel} - V_{eff}(r(t)))}$

} Lösung für festes E_{rel}, L_{rel}

Das sind zwei Differentialgleichungen (DGL) erster Ordnung in der Zeit!

aus der 2. Gleichung sieht man:

Es muß gelten: $E_{rel} \geq V_{eff}(r) \quad \forall r$

denn:

$E_{kin}^{rel} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 = E_{rel} - V_{eff}$ muß positiv sein!

„Klassisch erlaubte Bewegung"