II.8. Das Hamilton'sche Prinzip

Erinnerung:
Bisherige Behandlung von Systemen mit Zwangsbedingungen: d'Alembertsches Prinzip

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (m \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0}$$

Die gesamte geleistete „virtuelle Arbeit" ist Null

„virtuelle Verrückungen"

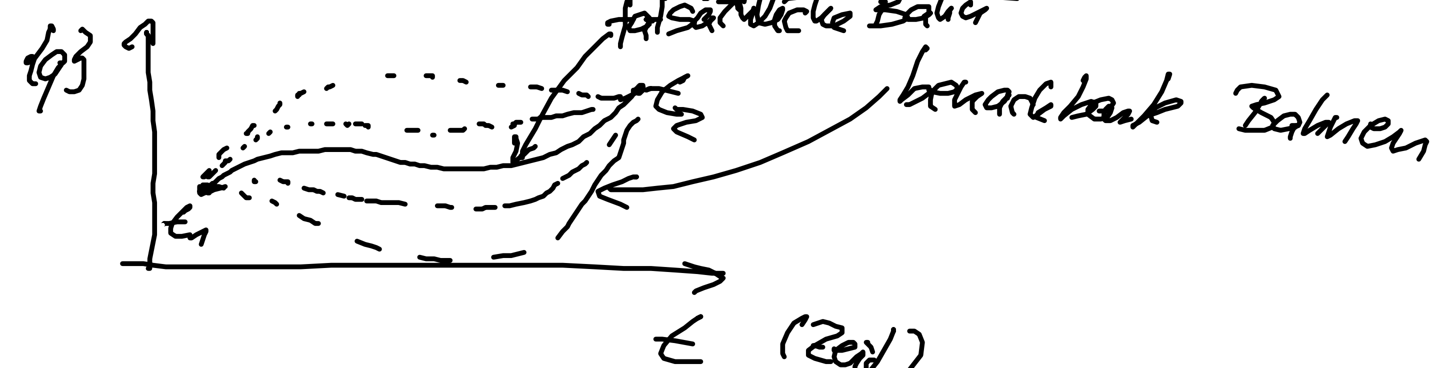
Das d'Alembertsche Prinzip kann auch als sogenanntes „Differentialprinzip" aufgefaßt:
Man „vergleicht" den momentanen Zustand des Systems mit dem Zustand, der sich aus kleinen virtuellen Verrückungen ergibt

man sagt:
Die erhaltene Bewegung ist gegen kleine Verrückungen stabil $\rightarrow$ Der Zustand des Systems ist „Extremalzustand"

Zeige nun:
Die Lagrange-BWGL lassen sich auch aus einem anderen Extremalprinzip herleiten — und zwar viel eleganter!
└ „Integralprinzip": Hamilton'sches Extremalprinzip!

Vorteile gegenüber d'Alembertschen Prinzip
- sehr elegante Formulierung
- Ideen hinter dem Hamilton'schen Prinzip sind auch in vielen anderen Gebieten der Theoretischen Physik wichtig!

Grundidee des Hamilton'schen Prinzip



Die tatsächliche Bahn macht eine bestimmte Integralgröße („Wirkung") extremal $\Longrightarrow$ Lagrange-BWGL

Einschub: Elemente der Variationsrechnung

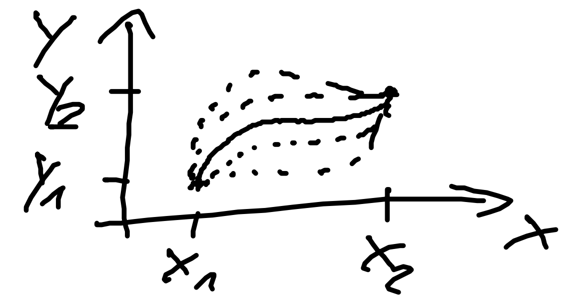
Betrachte zunächst ein-dimensionales Problem

Sei $\underbrace{I[y,y']}_{\text{„Funktional" der Funktionen } y(x)} := \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x, y(x), y'(x))$

mit $y'(x) = \frac{dy}{dx}$

x_1, x_2 Randpunkte

Gesucht:
Die Funktion $y(x)$, die an den Randpunkten vorgegebene Werte $y_1 = y(x_1)$ und $y_2 = y(x_2)$ annimmt und für die das Funktional I extremal wird



Wie führt man das durch?

Führe dazu zunächst Vergleichskurven ein:

$$y_\alpha(x) = \underbrace{y(x)}_{\text{gesuchte Kurve}} + \underbrace{\alpha}_{\text{Parameter}}\,\eta(x) \qquad \text{mit } \eta(x_1) = 0,\ \eta(x_2) = 0$$

betrachte $\alpha\eta(x) = \delta y(x)$ als kleine Verschiebung der Bahn durch Änderung des Parameters α

Betrachte nun die sogenannte Variation von
$I = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x, y, y')$; d.h. die Änderung von I mit α:

$$\delta I = I[y_\alpha, y_\alpha'] - I[y, y']$$

$$= \int dx \left(f(x, y_\alpha, y_\alpha') - f(x, y, y') \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha} \right)$$

Annahme: α klein!

die Endpunkte x_1 und x_2 ~~werden ver~~ bleiben von der Variation unbeeinflusst!

Umschreiben des 2. Terms:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)$$

benutze $y' = \frac{dy}{dx}$

partiell integrieren:

$$= \cancel{\left[\frac{\partial f}{\partial y'} \underbrace{\frac{dy}{d\alpha}}_{\eta(x)} \right]_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{dy}{d\alpha} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

Erinnerung:

$y_\alpha = y(x) + \alpha \eta(x)$ und $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$!

Zusammenfassung:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy}{d\alpha} \right)$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \cdot \underbrace{\frac{dy}{d\alpha}}_{\eta(x)}$$

Erinnerung:
Gesucht war die Funktion $y(x)$, für die die Größe I extremal wird, d.h.

$$\delta I = 0 \quad !$$

für beliebige Variationen δy.
(hier $\delta y = \alpha\,\eta(x)$)

$\Rightarrow$ Es muß also gelten:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Euler'sche Gleichung der Variationsrechnung

Bemerkung:

Anstatt ~~de~~ den Hilfsparameter α einzuführen, kann man auch folgendes schreiben:

$$\delta I = \delta\left(\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x,y,y')\right)$$

$$= \int^{x_2} dx\,\big(f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y')\big)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'}_{\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y} \right)$$

$$\boxed{\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \overset{!}{=} 0$$

partielle Integration

benutze, daß

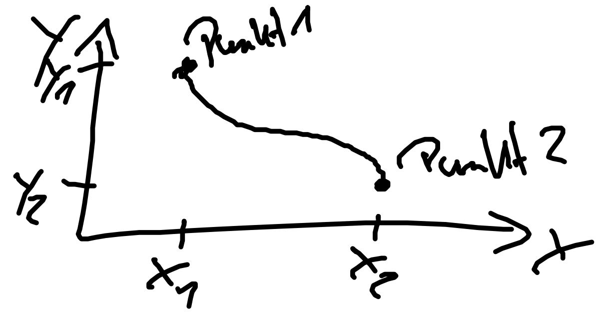
$\delta y = 0$ bei x_1 und x_2

für alle δy

$\Longrightarrow$ Euler'sche Gleichung $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$

<u>Einfaches Beispiel</u> zum Variationsverfahren:

Suche die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene



Ausgangspunkt:

Element der Bogenlänge $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$= \sqrt{dx^2 + \Big(\underbrace{\tfrac{dy}{dx}}_{y'}\Big)^2 dx^2} = \sqrt{dx^2 + y'^2 dx^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Gesamte Bogenlänge

$$I = \int_{\text{Punkt 1}}^{\text{Punkt 2}} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{f(x,y,y')}$$ Funktional

hängt hier nicht von y ab, nur von y'!

Kürzeste Verbindung?

$$\delta I = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$ Euler'sche Gleichung

hier $\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

Nur erfüllbar durch Ansatz $y'(x) = \text{const}$!

$\Longleftrightarrow y(x) = ax + b$

Geradengleichung!

Die Konstanten a und b sind festgelegt durch die Forderung $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

II.9. Lagrange-Gleichungen und Hamilton'sches Prinzip

Betrachte mechanisches System mit holonomen Zwangsbedingungen und konservativen Kräften

$\Rightarrow$ Man kann Lagrangefunktion definieren

$$L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) = T - V$$

Definiere nun die sogenannte Wirkung

$$\boxed{S := \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)}$$

(Wirkungsintegral)

Dimension: Energie mal Zeit

Die tatsächlichen physikalischen Bahnkurven (d.h. die Lösungen der BWGL) zeichnen sich dadurch aus, daß

$$\boxed{\delta S = 0}$$

für beliebige Variation von den wirkliche Bahnkurven!

(wir müssen also die Variationsrechnung auf viele Variablen $q_1 \ldots q_f$ verallgemeinern!)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(L(q_1 + \delta q_1, \ldots, q_f + \delta q_f, \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f + \delta\dot{q}_f, t) - L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) \Big)$$

kleine Abweichungen!

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \underbrace{\delta \dot q_k(t)}_{= \frac{d}{dt} \delta q_k(t)} \right)$$

Nebenrechnung (2. Term)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{d}{dt} \delta q_k = \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \right) \delta q_k$$

Forderung: $\delta q_k = 0$ bei den Randpunkten t_1, t_2

$$\Rightarrow \delta S = \int dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \right) \delta q_k \overset{!}{=} 0$$

δS soll extremal sein für beliebige Abweichungen δq_k

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad k = 1, \dots, f$$

beachte: Die generalisierte Koordinaten können unabhängig variiert werden

Hier entspricht also die Euler'sche Gleichung der Lagrange-Gleichung 2. Art!

Bemerkungen:

- Einschränkung auf holonome Zwangsbedingungen (sonst könnten wir keine generalisierten Koordinaten definieren!)

(Erinnerung: d'Alembert auch formulierbar für nicht-holonome Zwangsbedingungen!)

- Hamilton'sches Prinzip ist ~~Integ~~ Integralprinzip: Man vergleicht tatsächliche Bahn mit Schar von Nachbarbahnen und integriert!