Hamilton'sches Prinzip

Test

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_1,\dots,q_f,\dot q_1,\dots,\dot q_f,t)$$

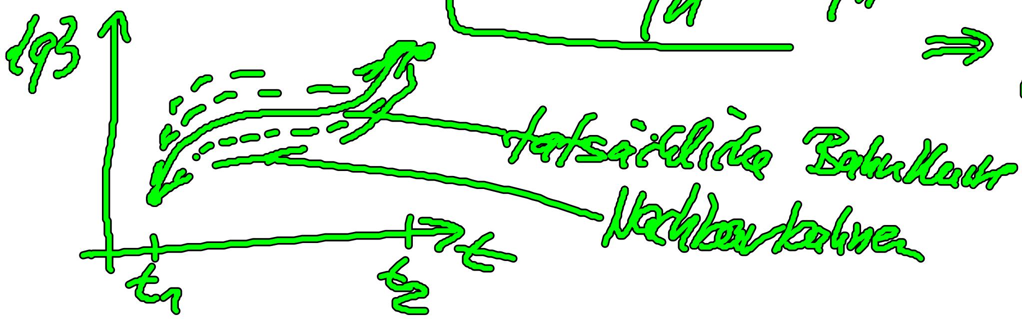
Wirkungsintegral

$L = T - V$

$$\delta S \overset{!}{=} 0 \implies \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

für konservative Systeme

$\implies q_k(t)$



Man kann das Hamilton'sche Prinzip erweitern auf holonome, nicht-konservative Systeme

modifizierten Wirkungsintegral:

$$\tilde S = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(T - W)$$

mit $W = -\sum_{i=1} \vec F_i \cdot \vec r_i$

Bewegungsgleichungen aus

$\delta \tilde S \overset{!}{=} 0$ (legt die tatsächlichen Bahnkurven fest) beachte: $\underbrace{T - W}_{\text{Integrand in } \hat{S}}$ = kinetische Energie plus Arbeit

($W \sim \underline{F} \cdot \underline{r}$)

$$\delta \hat{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k - \delta W \right)$$

(dabei benutzt $T = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$)

benutze außerdem

$$\delta W = - \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i}_{\text{virtuelle Arbeit}} = - \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l} \delta q_l$$

$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$

$$= - \sum_{l=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l} \right) \delta q_l$$

$$= - \sum_{l} Q_l \, \delta q_l$$

mit Q_l (Komponente der generalisierten Kraft)

einsetzen:

$$\delta \hat{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + Q_k \delta q_k \right)$$

benutze noch:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial T}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \overset{\text{partiell integrieren}}{=} \cancel{\left[\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} \delta q_k \right)$$

$$\Rightarrow \delta \hat{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} + Q_k \right) \delta q_k \overset{!}{=} 0$$

für jede Veränderung δq_k

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}$$

Lagrange-Gleichungen für nicht-konservative

entspricht dem Ergebnis aus dem d'Alembertschen Prinzip

Zurück zum konservativen Fall:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad \text{mit } V = V(q_1, \ldots, q_f)$$

skalares Potential

II.10 Eichtransformationen der Lagrangegleichungen

Wir zeigen nun, daß die Lagrangefunktion L durch die Lagrangegleichungen nicht eindeutig festgelegt ist

betrachte konservatives, holonomes System

Eichtransformation:

Die Transformation $L \longrightarrow L' = L + \frac{d}{dt} M(q_1, \dots, q_f, t)$ mit beliebiger (aber nicht geschwindigkeitsabhängiger) „Eichfunktion" M läßt die Lagrangegleichungen invariant!

BWGL: für die Original-Lagrangefunktion

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\frac{dM}{dt}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{dM}{dt}\right)$$

$L' = L + \frac{d}{dt}M$

(*)

$$M = M(q_1, \dots, q_f, t)$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \sum_{\ell=1}^{f} \frac{\partial M}{\partial q_\ell}\dot q_\ell + \frac{\partial M}{\partial t}$$ totale zeitliche Ableitung

benutze

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\sum_{\ell=1}^{f} \frac{\partial M}{\partial q_\ell}\dot q_\ell + \frac{\partial M}{\partial t}\right)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{f} \frac{\partial M}{\partial q_\ell}\frac{\partial \dot q_\ell}{\partial \dot q_k} = \sum_{\ell=1}^{f} \frac{\partial M}{\partial q_\ell}\delta_{\ell k} = \frac{\partial M}{\partial q_k}\ !$$

Einsetzen in (*)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial q_k}\right)}$$
$$- \frac{\partial L}{\partial q_k} - \cancel{\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial M}{\partial t}}$$

Fordere: $\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial M}{\partial t}$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}$$ Originalgleichungen!

Wichtigste Anwendung:

geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld!

betrachte also Teilchen der Masse m, Ladung e, in Anwesenheit eines elektrischen Feldes $\underline{E}(\underline{r},t)$ und eines Magnetfeldes $\underline{B}(\underline{r},t)$

Newton'sche BWGL

$$m\underline{\ddot{q}} = \underline{F}^{\text{Lorentz}} = e\underline{E} + \frac{e}{c}(\underline{\dot{q}} \times \underline{B})$$

Annahme: keine Zwangsbedingung! $\Rightarrow$ $\underline{q} = \underline{r}$

$\underline{\dot{q}} = \underline{v}$

Frage:
Was ist die zugehörige Lagrangefunktion, so daß $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ auf die Newton'sche BWGL führt!

Zunächst: Grenzfall $\underline{B} = 0$

$\rightarrow$ Kraft nicht mehr geschwindigkeits-abhängig

„konservativer Grenzfall"

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$ Maxwell'sche Gleichung (Induktionsgesetz)

hier: $\nabla \times \underline{E} = 0$!

$\Rightarrow$ man kann schreiben: $\underline{E} = -\nabla \Phi(\underline{r}, t)$

skalare Potential der Elektrostatik

(denn $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\Phi)) = 0$)

$$\Rightarrow \underline{F} \underset{\underline{B}=0}{\overset{\text{Lorentz}}{=}} e\underline{E} = -e\nabla\Phi(\underline{r}, t)$$

$$\Rightarrow \underline{F} = e\underline{E} = -\nabla V(\underline{r})$$

$$V(\underline{r}) = e\Phi(\underline{r})$$

$\Rightarrow$ Lagrangefunktion: $L = T - V$ $\boxed{\underline{q} = \underline{r}}$

$$= \frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2 - e\Phi(\underline{q})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = m\ddot{q}_k + e\frac{\partial\Phi}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow m\ddot{q}_k = -e\frac{\partial\Phi}{\partial q_k} = e(-\nabla\Phi)_k$$

$$= e(\underline{E})_k$$

allgemeiner Fall mit Magnetfeld

① $\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ Induktionsgesetz

② $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ (Maxwell-Gleichungen)

Es gibt keine magnetischen Quellen („Monopole")

Folgerung aus ②

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \underbrace{\underline{A}(\underline{r},t)}_{\text{Vektorpotential}} \quad !$$

(denn $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\underline{A})) = 0$)

Um ① zu erfüllen, muß für das elektrische Feld gelten:

$$\underline{E} = -\nabla\Phi(q,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

mit diesem Ansatz für $\underline{E}$ folgt sofort:

$$\nabla \times \underline{E} = -\cancel{\nabla \times (\nabla\Phi)} - \frac{1}{c}\nabla \times \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\cdot\frac{1}{c} \Rightarrow ①$$

Ansatz für die Lagrangefunktion

$$L = T - \underbrace{\left(e\Phi(q,t) - \frac{e}{c}\dot{q}\cdot\underline{A}(q,t)\right)}_{\text{„verallgemeinertes Potential"}}$$

Einsetzen in die Lagrange'schen BWGL

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

hier:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -e\frac{\partial}{\partial q_k}\Phi + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\dot q\cdot \underline{A}(q,t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \frac{d}{dt}(m\dot q_k) + \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\sum_{l=1}^{3} \dot q_l A_l\right)}_{\sum_{l=1}^{3} \delta_{kl}A_l = A_k}\right)$$

$$= m\ddot q_k + \frac{e}{c}\frac{d}{dt}A_k(q,t) = m\ddot q_k + \frac{e}{c}\left(\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial A_k}{\partial q_l}\dot q_l + \frac{\partial A_k}{\partial t}\right)$$

$$m\ddot q_k = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} - e\frac{\partial \Phi}{\partial q_k}$$

$$+\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\dot q\cdot \underline{A}(q,t)\right)$$

$$\underbrace{-\frac{e}{c}\sum_{l=1}^{3}\underbrace{\frac{\partial A_k}{\partial q_l}\dot q_l}_{\dot q_l\frac{\partial A_k}{\partial q_l}}}_{(\dot q\cdot\nabla)A_k}$$

$$\boxed{E_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_k} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}}$$

k-te Komponente des $\underline{E}$-Feldes

$$m\ddot{q}_k = eE_k(q,t) + \frac{e}{c}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial q_k}(\dot{q}\cdot\underline{A}(q,t)) - (\dot{q}\cdot\nabla)A_k(q,t)\right)}_{\dot{q}\times\underline{B}(q,t)\ !}$$

Zeige das:

$$(\dot{q}\times\underline{B}(q,t))_k = (\dot{q}\times(\nabla\times\underline{A}(q,t)))_k$$

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

hier: $\underline{a}\to\dot{q}$, $\underline{c}\to\underline{A}$, $\underline{b}\to\underline{\nabla}$

$$= \Big(\nabla(\dot{q}\cdot\underline{A}) - \underbrace{\underline{A}(\dot{q}\cdot\nabla)}_{(\dot{q}\cdot\nabla)\underline{A}}\Big)_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}(\dot{q}\cdot\underline{A}) - (\dot{q}\cdot\nabla)A_k$$

Das heißt:

Die Lagrange-Funktion

$$L = T - \left(e\Phi(\underline{q},t) - \frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(\underline{q},t)\right)$$

führt zusammen mit den Lagrange-Gleichungen 2. Art tatsächlich auf die richtigen BWGL!

(mit der Lorentzkraft

$$\underline{F} = e\underline{E} + \frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}}\times\underline{B}\,)$$