Eichtransformationen

Lagrangefunktion $\quad L \longrightarrow L' = L + \frac{d}{dt} M(q_1, \dots, q_f, t)$

M ist beliebig, aber nicht geschwindigkeitsabhängig!

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

„Beispiel": geladenes Teilchen im elektromagnet. Feld

Newton: $\quad m\ddot{\underline{q}} = \underbrace{e\underline{E} + \frac{e}{c}(\dot{\underline{q}} \times \underline{B})}_{\text{Lorentzkraft}}$ $\quad$ mit $\underline{q} = \underline{r}$

man findet:

$$L = T - \Big(e\underbrace{\Phi(\underline{q},t)}_{\text{skalares Potential}} - \frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}} \cdot \underbrace{\underline{A}(\underline{r},t)}_{\text{Vektorpotential}}\Big)$$

$$\underline{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

Elektrodynamik:

Eichtransformationen der Potentiale Φ und $\underline{A}$

$$\Phi(q,t) \to \Phi'(q,t) = \Phi(q,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(q,t)$$

$$\underline{A}(q,t) \to \underline{A}'(q,t) = \underline{A}(q,t) + \nabla\chi(q,t)$$

mit $\chi(q,t)$

Eichfreiheit in der Elektrodynamik

läßt die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ invariant!

Gradient

$$\underline{E}' = -\nabla\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}' = -\nabla\Phi + \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi}$$

$$= \underline{E} \qquad \underbrace{\text{rot grad}\,\chi = 0!}\; -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi(q,t)}$$

verschwinden, falls $\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \nabla\frac{\partial}{\partial t}\chi$

analog:

$$\underline{B}' = \nabla\times\underline{A}' = \nabla\times\underline{A} + \nabla\times\nabla\chi$$

$$\Rightarrow \underline{B}' = \underline{B} \quad \text{wie gefordert!}$$

Betrachte nun die entsprechende Transformation der Lagrangefunktion

$$L' = T - e\left(\Phi' - \frac{1}{c}\dot{q}\cdot\underline{A}'\right)$$

$$= T - e\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{c}\dot{q}\cdot\underline{A} - \frac{1}{c}\dot{q}\cdot\nabla\chi\right)$$

$$= \underbrace{T - e\left(\Phi - \frac{1}{c}\dot{q}\cdot\underline{A}\right)} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \dot{q}\cdot\nabla\chi\right)$$

$$= L + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \dot{q}\cdot\nabla\chi\right)$$

benutze:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\chi(q,t)\right) = \frac{e}{c}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\chi}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$
$$= \frac{e}{c}\left(\nabla\chi\cdot\dot{\underline{q}} + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$

Kombiniere:

$$L' = L + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{e}{c}\chi(q,t)\right)}_{M(q,t)} \quad !$$

Die Eichtransformation in der Elektrodynamik (d.h. Transformation der Potentiale $\Phi(q,t)$ und $\underline{A}(q,t)$) führen zu einer Umeichung der Lagrangefunktion, die die BWGL $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0\right)$ invariant läßt!

$\Rightarrow$ Physik bleibt erhalten!

Anmerkung: $\underline{F}^{\text{Lorentz}}$ nicht konservativ!
trotzdem Konstruktion
einer Lagrangefunktion !?

allgemein gilt für nicht-konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$ ← generalisierte Kraft

konservative System: $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$

In manchen nicht-konservativen Fällen kann man ein verallgemeinertes Potential definieren und eine entsprechende verallgemeinerte Lagrangefunktion!

Sei $\tilde{V}$ das verallgemeinerte Potential

speziell im elektromagnetischen Fall:

$$\tilde{V} = e\left(\Phi(q,t) - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(\underline{q},t)\right)$$

$$L = T - \tilde{V}$$

Bedingung:

$$Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k}$$

Beachte: Für Reibungskräfte, die ja auch geschwindigkeitsabhängig sind, läßt sich kein verallgemeinertes Potential definieren

Zum Umgang mit Reibungskräften im Lagrange-Formalismus:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad (*)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

Annahme: $Q_k = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial q_k}}_{\text{Konservativer Anteil}} + \underbrace{Q_k^{(R)}}_{\text{Beitrag der Reibung}}$

definiere: $L = T - V$

$\underset{\text{aus } (*)}{\Rightarrow}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{(R)} \qquad (**)$$

Ansatz:

$$Q_k^{(R)} = -\sum_{l=1}^{f} \beta_{lk}\, \dot{q}_l$$

Geschwindigkeits-
abhängigkeit!

Führe ein

$$D = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{f} \sum_{l=1}^{f} \beta_{kl}\, \dot{q}_k \dot{q}_l$$

„Rayleigh'sche Dissipationsfunktion"

$$\Longrightarrow \quad Q_k^{(R)} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$$

Einsetzen in (**)

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0}$$

Lagrange-Gleichungen für System mit Reibung

Beispiel:

Teilchen der Masse m fällt vertikal unter Einfluß der Schwerkraft, dabei erfährt es eine (Stokes'sche) Reibungskraft (eindimensional!)

generalisierte Koordinate: z

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - \underbrace{mgz}_{V}$$

V : Potential der Schwerkraft

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 \quad \text{mit} \quad v = \dot{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + mg + \alpha\dot{z} = 0}$$

entspricht genau der Newton'schen BWGL !

Beachte auch:

In solchen Systemen (mit Konservativen und Reibungskräften) findet man:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(T+V)}_{\text{Gesamtenergie}} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) + \frac{dV}{dt}$$

$$= \underset{\substack{\text{nächster} \\ \text{Ü-Zettel}}}{\ldots\ldots} = -2D$$

„Energiedissipation"

$\Rightarrow$ Physikalische Interpretation der Größe D !

II.11 Symmetrien und Erhaltung

Ziel:

Wir zeigen mit Hilfe des Lagrange-Formalismus, dass bestimmte Symmetrien des Systems (d.h. Invarianzen gegenüber bestimmten Transformationen) zur Erhaltung entsprechender physikalischer Größen I führen (d.h. $\frac{dI}{dt} = 0$)

Diese Zusammenhänge zw. Symmetrie und Erhaltung sind Inhalt des Theorems von Emmy-Noether (1918)

Betrachte konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

II.11.1 Zeittranslationssymmetrie

$\hat{=}$ Physikalische Eigenschaften des Systems hängen nicht vom Zeitpunkt der Messung ab

Wann ist das erfüllt?

i) skleronome (d.h. nicht explizit zeitabhängige) Zwangsbedingung

$\Rightarrow$ Transformationsformel $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f)$

d.h. $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

(ii) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ d.h. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Potential darf nicht explizit zeitabhängig sein!

$\Leftrightarrow L = (q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

Betrachte das totale zeitliche Differential von L:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)$$

$$\boxed{\text{benutze } \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

Kombiniere linke und rechte Seite:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = 0$$

$\Rightarrow L - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$ ist Erhaltungsgröße!

Interpretation

betrachte dazu zunächst die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{lm} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_m}\dot{q}_l \dot{q}_m$$

$$\dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad = \frac{1}{2}\sum_{lm} T_{lm}\dot{q}_l\dot{q}_m$$

mit $T_{lm} = \sum_i m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_m}$

Folgerung:

$$\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k\Big(\frac{1}{2}\sum_{lm}T_{lm}\delta_{kl}\dot{q}_m$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{lm}T_{lm}\dot{q}_l\delta_{km}\Big)$$

$$= \sum_{k,m}T_{km}\dot{q}_k\dot{q}_m = 2T \qquad !$$

Für

Die Erhaltungsgröße ergibt sich also:

$$L - \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \underset{\substack{\uparrow\\ T-V}}{L} - 2T = T-V-2T$$

$$= -(T+V) = \underline{\underline{-E}}$$

Zeittranslationssymmetrie impliziert also $\frac{dE}{dt} = 0$

Bemerkungen

- Man nennt allgemein $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} =: p_k$ „generalisierte Impulse"

  z.B. freies Teilchen:

$$L = T = \frac{m}{2} \underline{v}^2 = \frac{m}{2} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x = p_x$$

- Die Funktion

$$H := \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L$$

heißt „Hamilton-Funktion"

Für Systeme mit Zeit-Translationsinvarianz ist
H eine Konstante der Bewegung

Speziell für skleronomes System gilt

$$H = T + V = E = \text{const}!$$