Zeittranslationsinvarianz

d.h. $\frac{\partial L}{\partial t}=0$; $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1,\dots,q_f)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{L - \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k}_{2T}}_{-E}\Big)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt}=0$$

Hamiltonfunktion: $H=\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L$

Die Größen $\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} =: p_k$ heißen generalisierte Impulse

II.11.2. Räumliche Translationssymmetrie

$\Rightarrow$ Physikalische Eigenschaften des Systems ändern sich nicht bei einer <u>kollektiven</u> Verschiebung der Koordinaten in eine Raumrichtung (z.B. entlang der x-Achse) d.h. $\left(\underline{r}_i\right)_x = x_i \longrightarrow x_i' = x_i + \varepsilon$ ← klein

$i = 1, \dots, N$ infinitesimale, kontinuierliche Transformation der Koordinaten

Symmetrie bzgl. Verschiebung entlang der x-Achse

$$\delta L = L\big|_{\{x_i'\}} - L\big|_{\{x_i\}} = 0$$

ε klein

$$\Rightarrow \delta L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \overbrace{\delta x_i}^{\varepsilon}$$

$\delta x_i = x_i' - x_i = \varepsilon$

$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$$

$\stackrel{!}{=} 0$ für beliebige ε

Folgerung $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad (*)$$

Welche Größe bleibt erhalten?

benutze: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ Lagrange'sche BWGL

einsetzen in (*)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

$\dot{x}_i = (\underline{v}_i)_x$ Geschwindigkeit

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = p_{i,x} = (\underline{p}_i)_x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (\underline{p}_i)_x = \frac{d}{dt} (\underline{P})_x = 0 \quad !$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i$$

also

Translationssymmetrie entlang einer Raumrichtung

$\Leftrightarrow$ Erhaltung des Gesamtimpulses ~~er~~ in dieser Raumrichtung !

Bemerkung:

Annahme: Konservatives System

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \iff \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{N} \left(\underline{F}_i\right)_x = \left(\underline{F}\right)_x = 0$$

Erhaltung des Gesamtimpulses $\longleftrightarrow$ Verschwinden der Gesamtkraft

Entspricht der Newton'schen Mechanik!

Eine noch etwas andere Formulierung des Problems:

Betrachte $q_1 = \varepsilon$ als generalisierte Koordinate

$\uparrow$ Verschiebungslänge

Koordinaten-Transformation

$$\underline{r}_i \rightarrow \overset{\hat{=}\varepsilon}{q_1}\, \underline{e}_x + \Delta \underline{r}_i(q_2, \dots, q_f)$$

unabhängig von ε!

Translationsinvarianz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} = 0 \iff \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \overset{\text{BWGL}}{\iff} \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}}_{p_1} = 0$$

p_1 generalisierter Impuls

Interpretation der erhaltenen Größe p_1

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial}{\partial \dot q_1} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i \frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial \dot q_1} \quad (*)$$

benutze $\dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot q_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_1} = \hat{\underline{e}}_x$$

einsetzen in $(*)$

$$\Rightarrow p_1 = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \dot{\underline{r}}_i}_{\underline{p}_i} \cdot \hat{\underline{e}}_x = (\underline{P})_x$$

D.h. diese Formulierung führt auf dasselbe Ergebnis wie vorher — wie zu erwarten war!

Beachte:

Eine Koordinate q_k, für die $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ heißt <u>zyklische</u> Koordinate

Der zugehörige generalisierte Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$ ist Erhaltungsgröße!

Beispiele

i) ein Teilchen in einem Potential $V = V(y,z)$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Damit x zyklische Koordinate!

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
$$= (\underline{P})_x = \text{const}$$

ii) Zwei Teilchen mit Paarwechselwirkung

$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ rein abstandsabhängig!

Potential zu einer Zentralkraft!

$\Rightarrow$ System ist translationsinvariant entlang der x, y, z - Richtung

$$\Rightarrow (\underline{P}) = \text{const} \quad \text{mit } \underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$$

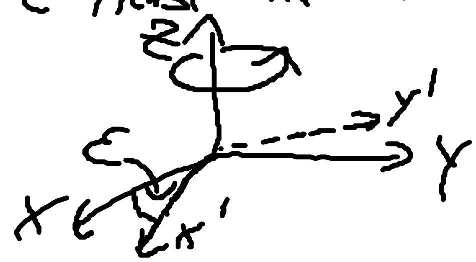
II. 11.3 Isotropie des Raumes (Rotationssymmetrie)

d.h. Physikalische Eigenschaften ändern sich nicht bei $\underbrace{\text{Drehung}}_{\text{einer } \underline{\text{Kollektiven}}}$ (d.h. Drehung des Gesamtsystems!)

Betrachte wieder Konservatives System ohne Zwangsbedingungen

Drehung: $\underline{r}_i \longrightarrow \underline{r}_i' = \overset{\text{Drehmatrix}}{\underline{\underline{R}}} \cdot \underline{r}_i$

betrachte z.B. Drehung um die z-Achse mit Winkel ε



$$x_i' = x_i \cos\varepsilon + y_i \sin\varepsilon$$

$$y_i' = y_i \cos\varepsilon - x_i \sin\varepsilon$$

$$z_i' = z$$

Annahme: ε klein $\Rightarrow$ $\cos\varepsilon \approx 1$

$\sin\varepsilon \approx \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_i' &= x_i + y_i \varepsilon \\ y_i' &= -x_i \varepsilon + y_i \\ z_i' &= z_i \end{aligned}\right\}$$

Zusammenfassung:

$$\underline{r}_i \rightarrow \underline{r}_i' = \underline{r}_i + \delta \underline{r}_i$$

$$\text{mit } \delta \underline{r}_i = \begin{pmatrix} y_i \varepsilon \\ -x_i \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{r}_i \times \varepsilon \underline{\hat{e}}_z$$

Beachte:

Drehung ändert auch die Geschwindigkeiten!

$$\underline{v}_i \longrightarrow \underline{v}_i' = \underline{v}_i + \underbrace{\delta \dot{\underline{r}}_i}_{\delta \underline{v}_i} = \underline{v}_i + \underbrace{(\underline{v}_i \times \varepsilon \underline{\hat{e}}_z)}_{\delta \underline{v}_i}$$

Was heißt diese Symmetrie für die Lagrangefunktion?

$$\delta L = L\Big|_{\{\underline{r}_i', \underline{v}_i'\}} - L\Big|_{\{\underline{r}_i, \underline{v}_i\}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \delta \underline{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \underline{v}_i} \delta \underline{v}_i \right) \stackrel{!}{=} 0$$

ε klein

$$\text{mit } \delta \underline{r}_i = \underline{r}_i \times \varepsilon \underline{\hat{e}}_z$$
$$\delta \underline{v}_i = \underline{v}_i \times \varepsilon \underline{\hat{e}}_z$$

benutze:

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \underset{\text{BWGL}}{\overset{}{=}} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = \dot{p}_i$$ ← lineare Impuls

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{v}_i} = \frac{\partial T}{\partial \underline{v}_i} = p_i \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \delta L = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{p}_i \cdot \delta \underline{r}_i + p_i \cdot \delta \underline{v}_i \right) = 0$$

Einsetzen von $\delta \underline{r}_i$ und $\delta \underline{v}_i$:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{p}_i \cdot (\underline{r}_i \times \varepsilon \hat{\underline{e}}_z) + p_i \cdot (\underline{v}_i \times \varepsilon \hat{\underline{e}}_z) \right)$$

$= 0$

$$\boxed{\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = \underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})}$$

$$\Rightarrow dL = \varepsilon\,\hat{\underline{e}}_z \cdot \sum_{i=1}^{N} \Big(\dot{\underline{p}}_i \times \underline{r}_i + \underline{p}_i \times \underbrace{\underline{v}_i}_{=\dot{\underline{r}}_i}\Big)$$

$$= \varepsilon\,\hat{\underline{e}}_z \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (\underline{p}_i \times \underline{r}_i) \overset{!}{=} 0$$

soll für beliebige ε gelten!

$$\Rightarrow \quad \hat{\underline{e}}_z \cdot \frac{d}{dt} \sum_i (\underline{p}_i \times \underline{r}_i) = 0 \quad (*)$$

Beachte: $\underline{l}_i = \underline{r}_i \times \underline{p}_i$

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{p}_i$$

aus $(*)$ folgt damit $\frac{d}{dt}(\underline{L})_z = 0$!

Drehinvarianz um die z-Achse $\Longleftrightarrow$ Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses!

gilt analog natürlich auch für die anderen Achsen!

Allgemeiner Zusammenhang
zwischen Symmetrie (gegenüber Koordinatentransformation)
und Erhaltung:

Die Lagrangefunktion L eines Systems sei invariant unter der kontinuierlichen Transformation $q \to h^s(q)$
mit s als kontinuierlichem Parameter
und $h^{s=0}(q) = q$

Dann gibt es eine Erhaltungsgröße
(Konstante der Bewegung
Integral der Bewegung)

$$I = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} h^s(q_k)\Big|_{s=0}$$

Beispiele
a) Translation in x-Richtung

(Annahme $\{q\} \to \underline{r}_i$, $f = 3N$)

$$h^s(\underline{r}_i) = \underline{r}_i + s\,\hat{\underline{e}}_x$$

kontinuierlicher Parameter, der die Verschiebungslänge beschreibt!

$$\frac{d}{ds} h^s(\underline{r}_i)\Big|_{s=0} = \hat{\underline{e}}_x$$

$$\Rightarrow I = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}}_{p_i} \cdot \hat{\underline{e}}_x = (\underline{P})_x$$

b) Rotation um die z-Achse: kontinuierlicher Parameter ist der Drehwinkel

$$\underline{h}^s(\underline{r}_i) = \begin{pmatrix} x_i + y_i s \\ y_i - x_i s \\ z_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \underline{h}^s(\underline{r}_i)\Big|_{s=0} = \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{r}_i \times \hat{\underline{e}}_z$$

Erhaltungsgröße:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}}_{p_i} \cdot (\underline{r}_i \times \underline{e}_z) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (\underline{r}_i \times \hat{\underline{e}}_z)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \hat{\underline{e}}_z (\underline{p}_i \times \underline{r}_i)$$

$$= -(\underline{L})_z$$