

Aussage:

Frau Schlemm ist krank..

→ Bitte auf die anderen Tutoren verteilen.

Erinnerung

Es gebe eine vom Parameter s abh. Transform.

$$q \rightarrow q^* = \eta^s(q).$$

Ist die Lagrangefunktion L unverändert:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q^*, \dot{q}^*, t)$$

Dann gibt es eine Erhaltungsgröße

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \eta^s(q_k) \Big|_{s=0}$$

Symmetrie → Erhaltungsgröße

Beispiel:

N -Teilchensystem mit Paarwechselwirkungen

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N v(r_{ij})$$

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

Dieses System ist invariant gegenüber Rotationen um alle Raumachsen.

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} \stackrel{!}{=} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \varphi} v(r_{ij})$$
$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial v(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j))^{1/2}$$
$$= \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \varphi} \right) = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \times \underline{e}_z \\ -\mathbf{r}_j \times \underline{e}_z \end{pmatrix}$$

bleibe VL!

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$$\| \mathbf{I}^{\text{neu}} = \varphi \cdot \mathbf{I}^{\text{alt}} \times \underline{e}_z \|$$

\Rightarrow Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße:

$$\underline{\underline{L}}.$$

Exkurs: Erzeugende einer infinitesimalen Drehung

Für eine infinitesimale Drehung um die z-Achse gilt:

$$\underline{x}'_i = \underline{x}_i + \delta \underline{x}_i \quad \delta \underline{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \varphi \\ -x_i \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{x}_i \times \underline{e}_z \varphi$$

beschreiben:

(nur für kleine Winkel!)

$$\underline{x}'_i = (\underline{1} - \varphi \underline{J}_z) \underline{x}_i$$

$$\text{mit } \underline{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenhang mit endlicher Drehung:

$$\underline{x}'_i = \underline{R}_z(\varphi) \underline{x}_i \quad \text{mit } \underline{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt: } \underline{R}_z(\varphi) = e^{-\underline{J}_z \varphi}$$

wobei die Exponentialfunktion eine $n \times n$ -Matrix gegeben sei mit:

$$\begin{aligned}\exp \underline{\underline{A}} &= \frac{1}{0!} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} + \dots + \frac{1}{n!} \underline{\underline{A}}^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\underline{\underline{A}})^n}{n!}\end{aligned}$$

analog: Drehung um x - oder y -Achse:

$$\underline{\underline{J}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{J}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}_x(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_x \varphi)$$

$$\underline{\underline{R}}_y(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_y \varphi)$$

→ Drehung um beliebige Raumachse:

$$\underline{\underline{n}} = n_1 \underline{\underline{e}}_x + n_2 \underline{\underline{e}}_y + n_3 \underline{\underline{e}}_z$$

$$\underline{\underline{R}}(\varphi) = \exp\left(-\sum_{i=1}^3 n_i \underline{\underline{J}}_i \varphi\right)$$

$\underline{\underline{R}}(\varphi)$: reell, orthogonal: $\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$.

$$\det \underline{R} = \pm 1$$

Für 3 Dimensionen, reell:

Drehgruppe:

$$SO(3) = \left\{ \underline{R}: \underline{R}^3 \rightarrow \underline{R}^3; \text{linear} \mid \det \underline{R} = \pm 1, \right. \\ \left. \underline{R}^T \underline{R} = \underline{1} \right\}$$

Ihre Elemente sind die
Drehmatrizen.

Die Erzeugenden \underline{J}_i der Drehgruppe bilden eine sogenannte „Lie-Algebra“.

Dies bedeutet, dass der Kommutator („Lie'sches Produkt“) zweier Erzeugender wieder eine Erzeugende ist.

Kommutator $[\underline{J}_i, \underline{J}_j]$:

$$[\underline{J}_i, \underline{J}_k] = \underline{J}_i \underline{J}_k - \underline{J}_k \underline{J}_i$$

Manifest:

$$[\underline{J}_x, \underline{J}_y] = \underline{J}_z$$

$$[\underline{J}_y, \underline{J}_z] = \underline{J}_x$$

$$[\underline{J}_z, \underline{J}_x] = \underline{J}_y$$

Bedeutung: „Zwei Drehungen um verschiedene Achsen vertauschen nicht“, d.h. das Ergebnis hängt von der Reihenfolge ab!

$$\begin{aligned} \text{Bsp: } [\underline{J}_y, \underline{J}_x] &= \underline{J}_y \cdot \underline{J}_x - \underline{J}_x \underline{J}_y = \\ &= -(\underline{J}_x \underline{J}_y - \underline{J}_y \underline{J}_x) \\ &= -[\underline{J}_x, \underline{J}_y] = -\underline{J}_z \end{aligned}$$

II. 12 Der Hamiltonsche Formalismus

→ neue Formulierung der Mechanik

Liste: Newton → sehr allgemein
(Newtonsche Axiome)

→ kennt alle Arten von Kräften zu
(unbedeutend)

→ relevante Größen sind die
Teilchenbahnen $\underline{r}_0(t)$

Lagrange-Mechanik:

→ größter Vorteil im Vergleich zu Newton:
Eliminierung der Zwangskräfte
in den Gleichungen

→ relevante Größe sind die generalisierte
Koordinaten: $\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}$

→ BwGL aus Hamiltonsche
(oder d'Alembertsche) Prinzip

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

f. Differentialgl. 2. Ordnung f. d. $q_k(t)$

Warum muss eine neue Formulierung?

→ Für bestimmte Erweiterungen (QM, statistische
Mech.)

ist es vorteilhaft, statt den $\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}$
die Variable $\{q_k\}$ und die dazugehörigen
konjugierten generalisierte Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

zu benutzen.

also Lagrangie
 $(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t) \rightarrow$ Hamilton
 $(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$

• neuer Satz von

unabhängige
Variablen.

- BWGL belieb. Sub.
von 2 f Differential-
gleichungen 1. Grades
für $\{q_k\}, \{p_k\}$.

Die Variablentransformation wird mit
Hilfe der sogen. Legendre-Transformation
durchgeführt.

Exkurs: Legendre-Transformation

Zunächst eindimensional

Gegeben: Funktion $f(x)$ mit $\frac{df}{dx} = z$

Ziel: statt x soll z als Variable
verwendet werden.

Df der Legendre-Transform von f bzgl. x :

$$\begin{aligned} L f(x) &:= x \cdot \frac{df}{dx} - f(x) ; \\ &= p(z) \cdot z - f(p(z)) \\ &=: \tilde{y}(z) \end{aligned} \left| \begin{array}{l} x = p(z) \\ \text{Annahme:} \\ z = \frac{df}{dx} \\ \text{umkehrbar!} \\ \text{Notwendig:} \\ \frac{d^2}{dx^2} f \neq 0 \end{array} \right.$$

Bemerkung:

- Die Variable von \tilde{y} ist tatsächlich nur z !
Betrachte dazu das Differential:

$$\begin{aligned} d\tilde{y} &= d\left(x \frac{df}{dx} - f(x)\right) \\ &= \cancel{dx \frac{df}{dx}} + x \cdot d\left(\underbrace{\frac{df}{dx}}_z\right) - \cancel{\frac{df}{dx} dx} \\ d\tilde{y} &= x \cdot dz \end{aligned}$$

d.h. nur z ist Variable

$$\rightarrow x = \frac{d\tilde{y}}{dz} !$$

$$\text{und } \frac{d^2 \gamma}{dz^2} = \frac{dx}{dz} = \frac{1}{dz/dx} = \frac{1}{d^2 f/dx^2} \neq 0$$

- Zweimalige Ausführung der Legendre Transformation

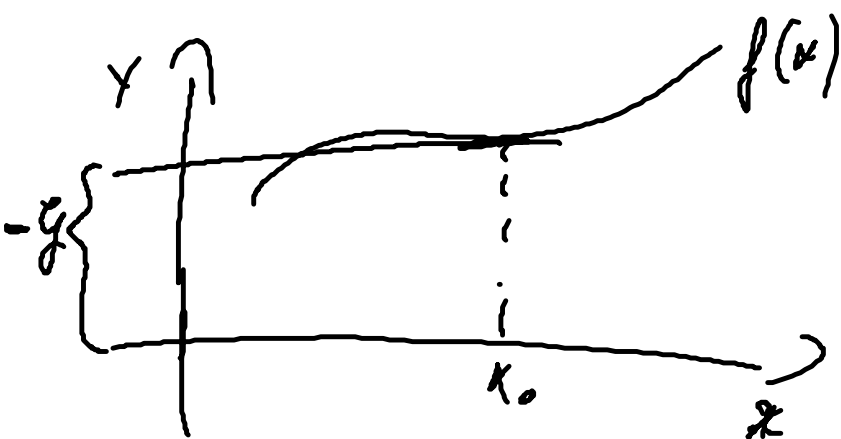
$$L L f(x) = L \gamma(z) = z \frac{d\gamma(z)}{dz} - \gamma$$

$$= z \cdot x - x \cdot z + f = \underline{\underline{f}}$$

- Alles:

Die Transformation $f \rightarrow L f = \gamma$ ist
umkehrbar eindeutig (falls $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$)

- Graphische Veranschaulichung der
Legendre - Trafo:



$$\gamma(z) = x \frac{df}{dx} - f$$

Tangenten gl. bei x

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{df}{dx} = z$$

$$b = f(x) - x \frac{df}{dx} = -\gamma$$

D.h. die ursprüngl. Funktion $f(x)$ wird durch die Legendre Transformation durch die Steigung (z) und den (negativen) Abszissenabschnitt ($-g$) der Tangente beschrieben.

→ Eindeutig!