Ansage:

Frau Schlemm ist krank.

$\longrightarrow$ Bitte auf die anderen Tutoren verteilen.

- - - - - - - - - - - - - - - -

Erinnerung

Es gebe eine vom Parameter S abh. Transform.

$$q \to q^* = h^S(q).$$

Ist die Lagrangefunktion ~~so~~ unverändert:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q^*, \dot{q}^*, t)$$

Dann gibt es ein Erhaltungsgröße

$$I = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dS} h^S(q_k)\Big|_{S=0}$$

Symmetrie $\rightarrow$ Erhaltungsgröße

- - - - - - - - - - - - - - - -

Beispiel:

N-Teilchensystem mit Paarwechselwirkungen

$$V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} v(r_{ij})$$

$$r_{ij} = |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$

Dieses System ist invariant gegenüber Rotationen um alle Raumachsen.

$$-\frac{\partial L}{\partial \varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ L = T - V}}{=} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \varphi} v(r_{ij})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left((\underline{r}_i - \underline{r}_j)\cdot(\underline{r}_i - \underline{r}_j)\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{r_{ij}} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial \varphi}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letzte VL!}}}{=} \frac{\underline{r}_{ij}}{r_{ij}} \cdot \left(\underline{r}_i \times \underline{e}_z - \underline{r}_j \times \underline{e}_z\right)$$

$$\| \underline{r}^{neu} = \varphi \cdot \underline{r}^{alt} \times \underline{e}_z \|$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße: $\underline{\underline{L}}$.

Exkurs: Erzeugende einer infinitesimalen Drehung

Für eine infinitesimale Drehung um die z-Achse gilt:

$$\underline{r}_i' = \underline{r}_i + \delta\underline{r}_i \quad \delta\underline{r}_i = \begin{pmatrix} y_i\varphi \\ -x_i\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{r}_i \times \underline{e}_z \varphi$$

(nur für kleine Winkel!)

umschreiben:

$$\underline{r}_i' = (\underline{1} - \varphi\, \underline{\underline{J}}_z)\, \underline{r}_i$$

$$\text{mit } \underline{\underline{J}}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenhang mit endlicher Drehung:

$$\underline{r}_i' = \underline{\underline{R}}_z(\varphi)\, \underline{r}_i \quad \text{mit } \underline{\underline{R}}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\underline{\underline{R}}_z(\varphi) = e^{-\underline{\underline{J}}_z \cdot \varphi}$

Wobei die Exponentialfunktion eine $n \times n$-Matrix gegeben sei mit:

$$\exp \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} + \ldots + \frac{1}{n!} \underline{\underline{A}}^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\underline{\underline{A}})^n}{n!}$$

<u>Analog</u>: Drehung um x- und y-Achse:

$$\underline{\underline{J}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \underline{\underline{J}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}_x(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_x \varphi)$$

$$\underline{\underline{R}}_y(\varphi) = \exp(-\underline{\underline{J}}_y \varphi)$$

$\longrightarrow$ Drehung um beliebige Raumachse:

$$\underline{n} = n_1 \underline{e}_x + n_2 \underline{e}_y + n_3 \underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{R}}(\varphi) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} n_i \underline{\underline{J}}_i \varphi\right)$$

$\underline{\underline{R}}(\varphi)$: reell, orthogonal: $\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$

$\det \underline{\underline{R}} = \pm 1$

Für 3 Dimensionen, reell:

<u>Drehgruppe</u>:

$$SO(3) = \left\{ \underline{\underline{R}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{; linear} \;\middle|\; \det \underline{\underline{R}} = \pm 1,\; \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}} \right\}$$

Ihre Elemente sind die Drehmatrizen.

Die Erzeugenden $\underline{\underline{J}}_i$ der Drehgruppe bilden eine sogenannte „Lie-Algebra".
Dies bedeutet, dass der Kommutator („Lie'sches Produkt") zweier Erzeugender wieder eine Erzeugende ist.

<u>Kommutator $[\,,]$</u>:

$$[\underline{\underline{J}}_i, \underline{\underline{J}}_k] := \underline{\underline{J}}_i \underline{\underline{J}}_k - \underline{\underline{J}}_k \underline{\underline{J}}_i$$

Man findet:

$$[\underline{\underline{J}}_x, \underline{\underline{J}}_y] = \underline{\underline{J}}_z.$$

$$[\underline{\underline{J}}_y, \underline{\underline{J}}_z] = \underline{\underline{J}}_x$$

$$[\underline{\underline{J}}_z, \underline{\underline{J}}_x] = \underline{\underline{J}}_y$$

Bedeutung: „Zwei Drehungen um verschiedene Achsen vertauschen nicht", d.h. das Ergebnis hängt von der Reihenfolge ab!

Bsp: $[\underline{\underline{J}}_y, \underline{\underline{J}}_x] = \underline{\underline{J}}_y \cdot \underline{\underline{J}}_x - \underline{\underline{J}}_x \underline{\underline{J}}_y =$

$$= -(\underline{\underline{J}}_x \underline{\underline{J}}_y - \underline{\underline{J}}_y \underline{\underline{J}}_x)$$

$$= -[\underline{\underline{J}}_x, \underline{\underline{J}}_y] = -\underline{\underline{J}}_z$$

II. 12 Der Hamiltonsche Formalismus

→ neue Formulierung der Mechanik

bisher: Newton → sehr allgemein (Newtonsche Axiome)

→ lässt alle Arten von Kräften zu (unterschiedliche)

→ relevante Größen sind die Teilchenbahnen $\underline{r}_0(t)$

Lagrange-Mechanik:

→ größter Vorteil im Vergleich zu Newton: Eliminierung der Zwangskräfte in den Gleichungen

→ relevante Größe sind die generalisierte Koordinaten: $\{q_k\}$, $\{\dot{q}_k\}$

→ BWGL aus Hamiltonsche (oder d'Alembertschen) Prinzip

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

f Differentialgl. 2. Ordnung f.d. $q_k(t)$

<u>Warum nun eine neue Formulierung?</u>

→ Für bestimmte Erweiterungen (QM, statistische Mech.)

ist es vorteilhaft, statt den $\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}$ die Variable $\{q_k\}$ und die dazugehörigen <u>konjugierte generalisierte Impulse</u>

$$\underline{p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}$$

zu benutzen.

also

$$\boxed{\text{Lagrange}}\quad\qquad\boxed{\text{Hamilton}}$$

$$(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t) \longrightarrow (\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

- neuer Satz von

unabhängige Variablen.

- BWGL bilden Satz von 2f Differentialgleichungen 1. Grades für $\{q_k\}$, $\{p_k\}$.

Die Variablentransformation wird mit Hilfe der sogen. Legendre-Transformation durchgeführt.

Exkurs: Legendre-Transformation

Zunächst eindimensional

Gegeben: Funktion $f(x)$ mit $\frac{df}{dx} = z$

Ziel: statt x soll z als Variable verwendet werden.

Def der Legendre-Trafo von f bzgl. x:

$$\mathcal{L} f(x) := x \cdot \frac{df}{dx} - f(x) \;;$$

$$= \varphi(z) \cdot z - f(\varphi(z))$$

$$=: \mathcal{G}(z)$$

$x = \varphi(z)$

Annahme: $z = \frac{df}{dx}$ umkehrbar!

Notwendig: $\frac{d^2}{dx^2} f \neq 0$

Bemerkung:

• Die Variable von ~~$\mathcal{G}$~~ $\mathcal{G}$ ist tatsächlich nur z!

Betrachte dazu das Differential:

$$d\mathcal{G} = d\left(x \frac{df}{dx} - f(x)\right)$$

$$= \cancel{dx \frac{df}{dx}} + x \cdot d\underbrace{\left(\frac{df}{dx}\right)}_{z} - \cancel{\frac{df}{dx} dx}$$

$$d\mathcal{G} = x \cdot dz$$

d.h. nur z ist Variable

$$\rightarrow x = \frac{d\mathcal{G}}{dz} \;!$$

und $$\frac{d^2 G}{dz^2} = \frac{dx}{dz} = \frac{1}{dz/dx} = \frac{1}{d^2f/dx^2} \neq 0$$

- Zweimalige Ausführung der Legendre Transformation

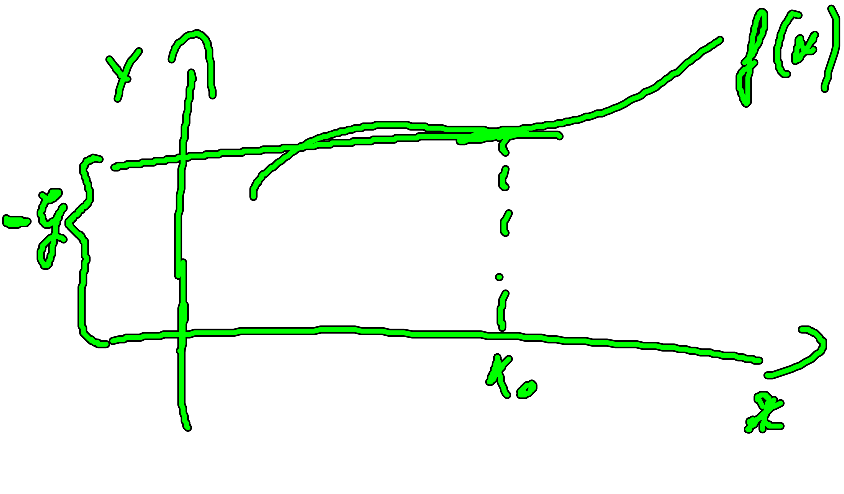
$$\mathcal{L}\mathcal{L}f(x) = \mathcal{L}G(z) = z\frac{dG(z)}{dz} - G$$

$$= z\cdot x - x\cdot z + f = \underline{\underline{f}}$$

- Also:

Die Transformation $f \to \mathcal{L}f = G$ ist umkehrbar eindeutig (falls $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$)

- Graphische Veranschaulichung der Legendre-Trafo:



$$G(z) = x\frac{df}{dx} - f$$

Tangentengl. bei x

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{df}{dx} = z$$

$$b = f(x) - x\frac{df}{dx} = -G$$

D.h. die ursprüngl. Funktion $f(x)$ wird durch die Legendre Transformation durch die Steigung (z) und den (negativen) Achsenabschnitt $(-g)$ der Tangente beschrieben.

$\longrightarrow$ Eindeutig!