Legendre-Transformation

$$\mathcal{L} f(x) := x \frac{df}{dx} - f(x)$$

$$\frac{df}{dx} = z$$

Annahme: $z = \frac{df}{dx}$ läßt sich umkehren

d.h. läßt sich nach x auflösen $\Rightarrow x(z)$

$x = \varphi(z)$

$$\mathcal{L} f(x) = \varphi(z) z - f(\varphi(z)) = G(z)$$

betrachte Differential:

$$dG = \ldots = x\, dz$$

Zweimaliges Ausführen: $\mathcal{L}\mathcal{L} f(x) = \mathcal{L} G(z) = z \frac{dG}{dz} - G = f(x)$

Zwei Beispiele

i) $f(x) = \alpha x^2$

$$\Rightarrow z = \frac{df}{dx} = 2\alpha x$$

$$\Rightarrow x = \frac{z}{2\alpha} = \varphi(z)$$

Legendre-Transformation:

$$\mathcal{L} f(x) = x(2\alpha x) - \alpha x^2$$

$$= \frac{z}{2\alpha} \cdot z - \alpha \left(\frac{z}{2\alpha}\right)^2 = \frac{z^2}{2\alpha} - \frac{z^2}{4\alpha} = + \frac{z^2}{4\alpha}$$

$= G(z)$

Rücktransformation

$$\mathcal{L}\, G(z) = z\,\frac{dG}{dz} - G = z\cdot\frac{z}{2\alpha} - \frac{z^2}{4\alpha} = \frac{z^2}{4\alpha}$$

$$= \frac{(2\alpha x)^2}{4\alpha} = \alpha x^2 = f(x)$$

(ii) $f(x) = \alpha x + c$ mit c, α Konstanten

hier $z = \frac{df}{dx} = \alpha$

$\longrightarrow$ nicht mehr nach x auflösen!

$$\mathcal{L} f(x) = x\cdot\alpha - (\alpha x + c) = -c = G(z)$$

$$\mathcal{L}\mathcal{L} f(x) = \mathcal{L}\, G(z) = z\cdot\frac{dG}{dz} - G$$

$$= z\cdot 0 + c \neq f(x)\ !$$

Verallgemeinerung auf mehrere Variablen

gesucht: $\mathcal{L}$ Legendre-Transformation einer Funktion $F(\{x_\ell\}, \{u_\ell\})$ mit $\ell = 1, \dots, m$

Transformation bzgl. des Satzes $\{x_\ell\} = x_1, \dots, x_m$

$$\mathcal{L}F(\{x_\ell\},\{u_\ell\}) := \left(\sum_{\ell=1}^{m} x_\ell \frac{\partial F}{\partial x_\ell}\right) - F(\{x_\ell\},\{u_\ell\})$$

mit $z_\ell = \frac{\partial F}{\partial x_\ell}$

umkehrbar eindeutig $\det\left(\frac{\partial F}{\partial x_\ell \partial x_k}\right) \neq 0$

$$\mathcal{L}F(\{x_\ell\},\{u_\ell\}) = \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell z_\ell - F = G(\{z_\ell\},\{u_\ell\})$$

betrachte wieder das Differential

$$dG = \cancel{\sum_{\ell=1}^{m} dx_\ell \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_\ell}}_{z_\ell}} + \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell \, d\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x_\ell}\right)}_{z_\ell} - \underbrace{\left(\cancel{\sum_{\ell=1}^{m} \overbrace{\frac{\partial F}{\partial x_\ell}}^{z_\ell} dx_\ell} + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_\ell} du_\ell\right)}_{dF}$$

$$dG = \sum_{l=1}^{m} x_l \, dz_l - \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_l} du_l \quad (*)$$

Die Variablen von G sind also tatsächlich $\{z_l\}, \{u_l\}$

es gilt außerdem: $dG = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial z_l} dz_l + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial u_l} du_l \quad (**)$

Vergleich von $(*)$ und $(**)$

$$\Rightarrow \quad x_l = \frac{\partial G}{\partial z_l}$$

und $$-\frac{\partial F}{\partial u_l} = \frac{\partial G}{\partial u_l}$$

II.12.2 Hamiltonfunktion und Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

Idee: Wende die Legendre-Transformation auf die Lagrange-Funktion $L(\{q_l\}, \{\dot{q}_l\}, t)$
$l = 1, \dots, f$
und zwar bzgl. des Satzes $\{\dot{q}_l\}$

$$\mathcal{L}\ L(\{q_k\},\{\dot q_k\},t)$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \dot q_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k} - L$$

mit $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}$ generalisierte Impuls!

$$= \sum_{k=1}^{f} \dot q_k\, p_k - L$$

$$= H(\{q_k\},\{p_k\},t)$$

Hamilton-Funktion

Differential

$$dH = d\left(\sum_{k=1}^{f} \dot q_k p_k - L\right) = \cancel{\sum_{k=1}^{f} d\dot q_k \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}}_{p_k}} + \sum_{k=1}^{f} \dot q_k\, d\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\right)}_{p_k}$$

$$- \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k - \cancel{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k} d\dot q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow dH = \sum_{k=1}^{f} \dot q_k\, dp_k - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \qquad (*)$$

vergleiche mit dem entsprechenden Ausdruck, der sich aus der Tatsache ergibt, daß $H = H(\{q_k\},\{p_k\},t)$

$$dH = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (**)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \;;\; \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \;;\; \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

Dabei wurde benutzt
(für die mittlere Gleichung)

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} p_k = \dot{p}_k$$

Lagrange-II
BWGL

<u>Bemerkungen</u>:

- Die Gleichungen $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$; $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ heißen Hamilton'sche Bewegungsgleichungen („kanonische Gleichungen")

• Die Hamilton'schen BWGL
bilden 2 Sätze von Differential-
gleichungen 1. Ordnung in der Zeit
für die Variablen $\{q_k\}$, $\{p_k\}$!

— im Unterschied zu Lagrange, wo man
einen Satz von Differentialgleichungen 2. Ordnung
in der Zeit hat

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

$k = 1, \dots, f$

• Der 2f-dimensionale Raum
$(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) := \Gamma$ heißt Γ-Raum
oder Phasenraum

wichtig z.B. in der Statistischen
Physik, wo es um Vielteilchensysteme
geht. Wichtige Größe dort ist z.B.

$\rho(\Gamma)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung, daß sich
ein Vielteilchensystem in einer
bestimmten Konfiguration befindet

oder in (niedrig-dimensionalen) mechanischen Systemen
z.B. Oszillator

• Physikalische Bedeutung der Hamiltonfunktion

Annahme: konservatives System, holonom-skleronome Zwangsbedingung

$\rightarrow \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f)$

keine Zeitabhängigkeit!
bzw. $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2 \underbrace{T}_{\text{kinetische Energie}}$$

(siehe Kapitel Zeittranslationsinvarianz)

und $L = T - V$ und $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Folgerung für die Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - T + V = \underbrace{T + V}_{\text{Gesamtenergie}}$$

d.h. hier hat H die Bedeutung ~~ein~~ der Gesamtenergie

Wir wissen bereits: Im konservativ-skleronomen System bleibt die Gesamtenergie erhalten

Nochmaliger Nachweis im Hamilton-Formalismus.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{BWG} \\ \dot{q}_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \end{array}}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(H(\{q_\mu\},\{p_\mu\},t) \Big)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \dot{p}_\mu \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

benutze BWGL $\overset{=}{}$ $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\right)\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \sum_{\mu=1}^{f} \cancel{\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu \partial p_\mu} - \frac{\partial H}{\partial p_\mu \partial q_\mu} \right)} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t}$$

verschwindet falls H bzw L nicht explizit zeitabhängig ist!

Beachte: Es gilt nicht immer H = Gesamtenergie

Gegenbeispiel: Konservatives System mit rheonomen Zwangsbedingungen