

# Hamilton-Formalismus

$$H = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} - \mathcal{L}$$

$$= H(q_k, p_k, t)$$

Hamilton'sche BWGL:  $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad k=1, \dots, f$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

speziell

holonom-skleronome Zwangsbedingungen  
+ konservative Kräfte

$$H = T + V$$

Gesamtenergie

und  $\frac{dH}{dt} = 0$

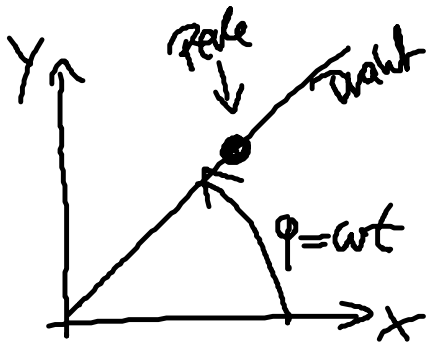
⚠ Beachte: Es gibt nicht immer

$$H = \text{Gesamtenergie}$$

Gegenbeispiel:

System mit rheonomer Zwangsbedingung

gleitende Perle auf rotierendem Draht



mit  $\omega$  Winkelgeschwindigkeit  
Zwangsbedingungen:

$$z=0$$

$$\frac{y}{x} = \tan \omega t \quad \left. \vphantom{\frac{y}{x} = \tan \omega t} \right\} f=1$$

Bewegung in der  
 $x$ - $y$ -Ebene

generalisierte Koordinate

$$\text{Wähle } q = r \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{mit } r = r(t)$$

Transformationsformeln:

$$x(t) = r(t) \cos \omega t$$

$$y(t) = r(t) \sin \omega t$$

Lagrangefunktion -

$$V = 0 \quad !$$

$$\begin{aligned} \rightarrow L = T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} \left( (\dot{r} \cos \omega t - r \omega \sin \omega t)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\dot{r} \sin \omega t + r \omega \cos \omega t)^2 \right) \\ &= \dots = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion.

$$H = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

$$\begin{aligned} q &= r \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \end{aligned}$$

$$= \dot{r} \underbrace{(m \dot{r})}_{p_r} - \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$$

$$= m \dot{r} = p_r$$

$$= \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{m}{2} r^2 \omega^2$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \neq T$$

Hier ist die Hamiltonfunktion also ungleich der kinetischen Energie (d.h. der Gesamtenergie)

(außerdem gilt aber  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ )

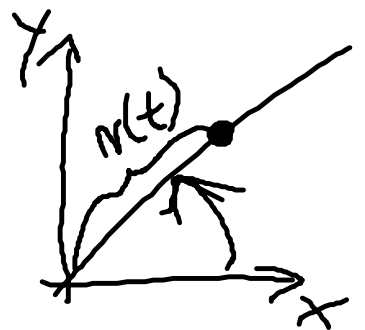
(li

Anmerkung zu unserem Beispiel

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \quad (\text{mit } p_r = m\dot{r})$$

$$\text{BWGL:} \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\underbrace{\dot{p}_r}_{m\ddot{r}} = -\frac{\partial H}{\partial r} = m\omega^2 r$$



$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{r} = \omega^2 r}$$

Ansatz:  $r(t) = A e^{+\omega t} + B e^{-\omega t}$   
 d.h.  $r(t)$  wächst mit der Zeit

## II. 12.3. Anwendungsschema des Hamilton-Formalismus

1) Wähle generalisierte Koordinaten  $\{q_k\}$   
 und bestimme die Transformationsformeln

2) bestimme die Größen  $T$  und  $V$  (falls System  
 konservativ)

3) Finde die generalisierten Impulse

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\Rightarrow p_k = p_k(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\})$$

4) Stelle die Hamilton-Funktion auf:

speziell: konservatives System  
 mit skleronomer Zwangsbedingung

$$H = T + V$$

allgemein:

$$H = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - L$$

5) Aufstellen und Lösen der Hamilton'schen BwG

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Beispiele

1) Bewegung eines Teilchens in  
Zentralpotential  $V(r)$

(z.B. Kepler-Problem:  $V(r)$  Gravitationspotential)  
Atommodell:  $V(r)$  Coulombpotential)

man weiß schon:

- Erhaltung des Drehimpulses
- Bewegung des Teilchens verläuft in der Ebene  
z.B.  $x$ - $y$ -Ebene

1) Generalisierte Koordinaten:

$r, \varphi$

mit  $x(t) = r(t) \cos \varphi(t)$

$y(t) = r(t) \sin \varphi(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi \\ &\quad - r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi \\ &\quad + r \cos \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

2) Bestimme  $T$  und  $V$ :

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r)$$

$$= \dots = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

3) Generalisierte Impulse:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} ; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

hieraus folgt:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} ; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$$

4) Hamilton-Funktion

$$H = \underbrace{p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi}}_{\sum_{k=1}^2 p_k \dot{q}_k} - L$$

$$= m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r)$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) = T + V \quad \text{wie zu erwarten!}$$

5) BWGL:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad ! \quad \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad ! \right)$$

$\Rightarrow \varphi$  ist zylindrische Koordinate  
und  $p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}$  bleibt erhalten!

Physikalisch entspricht die Aussage

$\dot{p}_\varphi = 0$  der Erhaltung des

Drehimpulses, insbesondere auch  $(L)_z$ !



$$\begin{aligned}
 \underline{(L)}_z &= \underline{(r \times p)}_z \quad (p = m \underline{v}) \\
 &= m(x v_y - y v_x) \\
 &= m \left( r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) \right. \\
 &\quad \left. - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \right) \\
 &= \dots = m r^2 \dot{\varphi} = p_\varphi
 \end{aligned}$$

2) 1-dimensionale harmonischer Oszillator

mm  
x 1)  $q = x$

2) Potential  $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

↑  
Federkonstante

$$3) p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$\begin{aligned}
 4) H = p_x \dot{x} - L &= \frac{p_x^2}{m} - \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \\
 &= T + V
 \end{aligned}$$

Wir wissen bereits:

$$H = T + V = \text{const} !$$

$$= E$$

$$\Rightarrow \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2 = E$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

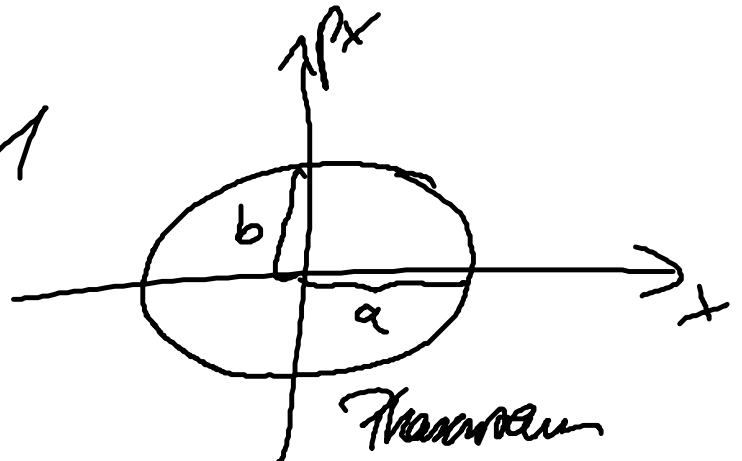
$$\Rightarrow \left( \frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega_0^2} = 1 \right) \quad (*)$$

Die Bahn des Systems im zweidimensionalen Phasenraum  $\Gamma = (x, p_x)$  ist also eine Ellipse!

führe ein:  $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}$

$$b = \sqrt{2mE}$$

aus  $(*) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{p_x^2}{b^2} = 1$



5) BWGC:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\frac{p_x}{m} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega_0^2 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

→ Schwingungsgleichung!

3) Geladenes Teilchen im  
elektromagnetischen Feld!

Erinnerung:

System ist nicht konservativ, da  
die zugehörige Kraft von der Geschwindigkeit  
abhängt!

$$\underline{F}^{\text{Lorentz}} = e \underline{E}(\underline{q}, t) + \frac{e}{c} (\dot{\underline{q}} \times \underline{B}(\underline{q}, t))$$

(mit  $\underline{q} = \underline{r}$ )

Man kann hier aber ein verallgemeinertes  
Potential definieren, das auf die richtigen  
Lagrange-BWGL führt!

$$L = \frac{m}{2} \dot{\underline{q}}^2 - \underbrace{\left( e\phi(\underline{q}, t) - \frac{e}{c} \dot{\underline{q}} \cdot \underline{A}(\underline{q}, t) \right)}$$

verallgemeinertes  
Potential!

~~Arbeit~~

(  $\phi$  skalares ~~z~~ Potential } Elektrodynamik  
 $\underline{A}$  Vektorpotential }

(Schritte 1)+2) aus dem „Kochrezept“)

3) Impulse

$K=x, y, z$

$$p_K = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_K} = m \dot{q}_K + \frac{e}{c} A_K(q, t)$$

$$\Leftrightarrow \underline{p} = m \underline{\dot{q}} + \frac{e}{c} \underline{A} \quad \textcircled{a}$$

$$\text{auflösen: } \underline{\dot{q}} = \frac{\underline{p}}{m} - \frac{e}{cm} \underline{A} \quad \textcircled{b}$$

4) Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{K=1}^3 p_K \dot{q}_K - \mathcal{L}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \sum_{K=1}^3 p_K \left( \frac{p_K}{m} - \frac{e}{cm} A_K(q, t) \right) - \mathcal{L}$$

$$\stackrel{\textcircled{b}}{=} \frac{p^2}{m} - \frac{e}{cm} \underline{p} \cdot \underline{A}(q, t) - \mathcal{L}$$

mit

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \left( e\phi - \frac{e}{c} \dot{q} \cdot \underline{A} \right)$$

$$\hat{=} \frac{m}{2} \left( \left( \frac{p}{m} - \frac{e}{cm} \underline{A} \right)^2 \right) - e\phi(q,t)$$

$$\textcircled{b} \quad + \frac{e}{c} \left( \left( \frac{p}{m} - \frac{e}{cm} \underline{A} \right) \right) \cdot \underline{A}$$

Einsetzen in die Hamiltonfunktion.

$$H = \frac{p^2}{m} - \frac{e}{cm} p \cdot \underline{A} - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2m} \left( \frac{e}{c} \right)^2 \underline{A}^2 + e\phi$$

$$+ \frac{e}{cm} p \cdot \underline{A} - \frac{e}{cm} p \cdot \underline{A} + \frac{1}{m} \left( \frac{e}{c} \right)^2 \underline{A}^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( \frac{e}{c} \right)^2 \underline{A}^2$$

$$- \frac{1}{m} \left( \frac{e}{c} \right) p \cdot \underline{A} + e\phi$$

Zusammenfassen.

$$H = \frac{1}{2m} \left( p - \frac{e}{c} \underline{A}(q,t) \right)^2 + e\phi(q,t)$$

• H ist nicht dasselbe wie

$$T + U \quad \text{mit } U = e\phi - \frac{e}{c} \dot{q} \cdot \underline{A}$$

verallg.  
Potential!

- Der in der Hamiltonfunktion vorkommende Ausdruck

$$p - \frac{e}{c} \underline{A}$$

heißt „kinetischer Impuls“

Diese Größe ist zu unterscheiden vom kanonisch-konjugierten Impuls

$$p = m \dot{q} + \frac{e}{c} \underline{A}(q, t)$$

(aus  $p_H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_H}$ )

- Das entsprechende Hamilton'sche BWC führen wieder auf

$$m \ddot{q} = \underline{F} \text{ (Lorentz)}$$