Hamilton-Formalismus

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot q_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}}_{p_k} - L$$

$$= H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

Hamilton'schen BWGL: $\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ $\quad k = 1, \ldots, f$

$$\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

speziell
holonom-skleronome Zwangsbedingungen
+ konservative Kräfte

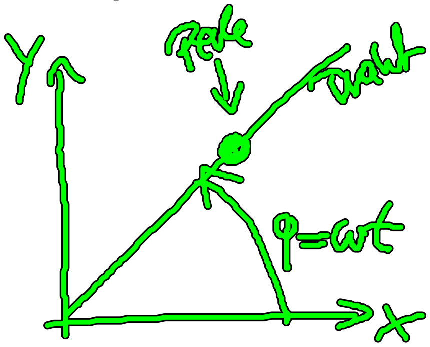
$$\underbrace{H = T + V}_{\text{Gesamtenergie}} \quad \text{und} \quad \frac{dH}{dt} = 0$$

Beachte: Es gilt nicht immer
H = Gesamtenergie

Gegenbeispiel:

System mit rheonomer Zwangsbedingung

Gleitende Perle auf rotierende Draht



mit ω Winkelgeschwindigkeit

Zwangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} z &= 0 \\ y/x &= \tan \omega t \end{aligned}\right\} f = 1$$

Bewegung in der x-y-Ebene

generalisierte Koordinate

Wähle $q = r$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$

mit $r = r(t)$

Transformationsformeln:

$$x(t) = r(t)\cos \omega t$$

$$y(t) = r(t)\sin \omega t$$

Lagrangefunktion:

$V = 0$!

$$\Rightarrow L = T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\Big((\dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t)^2 + (\dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t)^2\Big)$$

$$= \ldots = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

Hamilton-Funktion:

$q = r$

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p_r$$

$$= \dot{r}\underbrace{(m\dot{r})}_{p_r} - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\omega^2$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2}r^2\omega^2 \neq T$$

Hier ist die Hamiltonfunktion also ungleich der kinetischen Energie (d.h. der Gesamtenergie)
(außerdem gilt aber $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$)

(ii

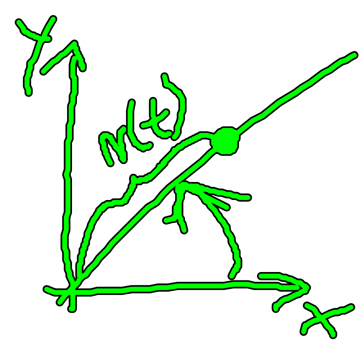
Anmerkung zu unserem Beispiel

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \quad (\text{mit } p_r = m\dot{r})$$

BWGL:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\underbrace{\dot{p}_r}_{m\ddot{r}} = -\frac{\partial H}{\partial r} = m\omega^2 r$$



$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{r} = \omega^2 r}$$

Ansatz: $r(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$

d.h. $r(t)$ wächst mit der Zeit

II.12.3. Anwendungsschema des Hamilton-Formalismus

1) Wähle generalisierte Koordinaten $\{q_k\}$ und bestimme die Transformationsformeln

2) bestimme die Größen T und V (falls System konservativ)

3) Finde die generalisierten Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\Rightarrow p_k = p_k(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\})$$

4) Stelle die Hamilton-Funktion auf:

speziell: konservatives System mit skleronomen Zwangsbedingungen

$$H = T + V$$

allgemein:

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L$$

5) Aufstellen und Lösen der Hamilton'schen BWGs

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Beispiele

1) Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential $V(r)$

(z.B. Kepler-Problem: $V(r)$ Gravitationspotential)
Atommodell : $V(r)$ Coulombpotential)

man weiß schon:
- Erhaltung des Drehimpulses
- Bewegung des Teilchens verläuft in der Ebene
  z.B. x-y-Ebene

1) Generalisierte Koordinaten:

r, φ

mit $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$

$y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}\\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}\end{aligned}}$$

2) Bestimme T und V:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r)$$

$$= \dots = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

3) Generalisierte Impulse:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

hieraus folgt:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

4) Hamilton-Funktion

$$H = \underbrace{p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi}}_{\sum_{k=1}^{2} p_k \dot{q}_k} - L$$

$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) = T + V$$ wie zu erwarten!

5) BWGL:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad !$$ (es gilt auch $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$!)

$\Longrightarrow$ φ ist zyklische Koordinate und $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ bleibt erhalten!

Physikalisch entspricht die Aussage $\dot{p}_\varphi = 0$ der Erhaltung des Drehimpulses, insbesondere auch $(\underline{L})_z$!

$$(\underline{L})_z = (\underline{r} \times \underline{p})_z \qquad (\underline{p} = m\underline{v})$$

$$= m(x v_y - y v_x)$$

$$= m\big(r\cos\varphi\,(\dot r \sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi) - r\sin\varphi\,(\dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi)\big)$$

$$= \dots = m r^2 \dot\varphi = p_\varphi$$

2) 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

1) $q = x$

2) Potential $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

$\uparrow$ Federkonstante

$$L = \frac{m}{2}\dot x^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

3) $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x$

4) $$H = p_x \dot x - L = \frac{p_x^2}{m} - \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$$

$$= T + V$$

Wir wissen bereits:

$$H = T + V = \text{const} \quad !$$

$= E$

$$\Rightarrow \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2 = E \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

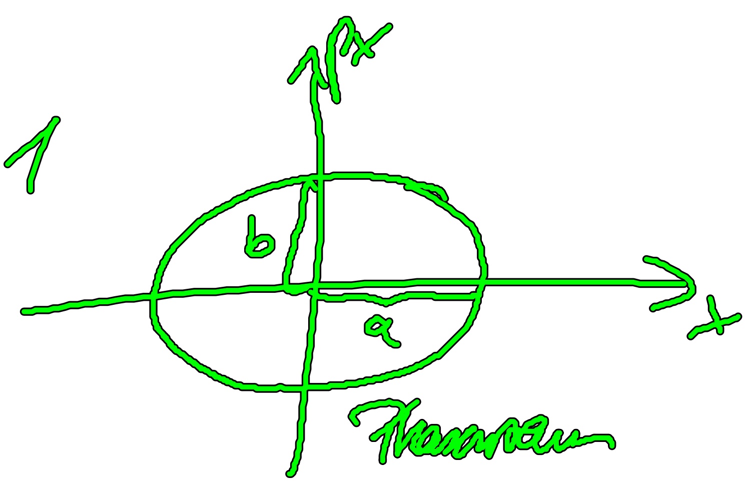
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega_0^2} = 1} \quad (*)$$

Die Bahn des Systems im zweidimensionalen Phasenraum $\Gamma = (x, p_x)$ ist also eine Ellipse!

führe ein: $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}$

$b = \sqrt{2mE}$

aus $(*)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{p_x^2}{b^2} = 1$



5) BWGL:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\underbrace{\dot{p}_x}_{m\ddot{x}} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega_0^2 x \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Schwingungsgleichung!

3) Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld!

Erinnerung:
System ist nicht konservativ, da die zugehörige Kraft von der Geschwindigkeit abhängt!

$$\underline{F}^{\text{Lorentz}} = e\,\underline{E}(\underline{q},t) + \frac{e}{c}\left(\dot{\underline{q}} \times \underline{B}(\underline{q},t)\right)$$

(mit $\underline{q} = \underline{r}$)

Man kann hier aber ein verallgemeinertes Potential definieren, daß auf die richtigen Lagrange-BWGL führt!

$$L = \frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2 - \underbrace{\left(e\Phi(\underline{q},t) - \frac{e}{c}\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(\underline{q},t)\right)}_{\text{verallgemeinertes Potential!}}$$

$\left.\begin{array}{l}(\Phi \text{ skalares Potential} \\ \underline{A} \text{ Vektorpotential})\end{array}\right\}$ Elektrodynamik

(Schritte 1) + 2) aus dem „Kochrezept")

3) Impulse $\qquad k = x, y, z$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m\dot{q}_k + \frac{e}{c} A_k(q,t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{p} = m\underline{\dot{q}} + \frac{e}{c}\underline{A} \quad (a)$$

auflösen: $\quad \underline{\dot{q}} = \frac{\underline{p}}{m} - \frac{e}{cm}\underline{A} \quad (b)$

4) Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{k=1}^{3} p_k \dot{q}_k - L$$

$$\overset{(b)}{=} \sum_{k=1}^{3} p_k \left(\frac{p_k}{m} - \frac{e}{cm} A_k(q,t)\right) - L$$

$$= \frac{\underline{p}^2}{m} - \frac{e}{cm}\underline{p}\cdot\underline{A}(q,t) - L$$

mit

$$L = \frac{m}{2}\underline{\dot{q}}^2 - \left(e\Phi - \frac{e}{c}\underline{\dot{q}}\cdot\underline{A}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (b)}}{=} \frac{m}{2}\left(\left(\frac{p}{m} - \frac{e}{cm}\underline{A}\right)^2\right) - e\Phi(q,t)$$

$$+ \frac{e}{c}\left(\left(\frac{p}{m} - \frac{e}{cm}\underline{A}\right)\right)\cdot\underline{A}$$

Einsetzen in die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{p^2}{m} - \frac{e}{cm}p\cdot\underline{A} - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2m}\left(\frac{e}{c}\right)^2\underline{A}^2 + e\Phi$$

$$+ \frac{e}{cm}p\cdot\underline{A} - \frac{e}{cm}p\cdot\underline{A} + \frac{1}{m}\left(\frac{e}{c}\right)^2\underline{A}^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{e}{c}\right)^2\underline{A}^2$$

$$- \frac{1}{m}\left(\frac{e}{c}\right)p\cdot\underline{A} + e\Phi$$

Zusammenfassen:

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(p - \frac{e}{c}\underline{A}(q,t)\right)^2 + e\Phi(q,t)} \quad !$$

- H ist <u>nicht</u> dasselbe wie

$$T + \underbrace{U}_{\substack{\text{verallg.} \\ \text{Potential!}}} \qquad \text{mit } U = e\Phi - \frac{e}{c}\dot{q}\cdot A$$

- Der in der Hamiltonfunktion vorkommende Ausdruck

$$p - \frac{e}{c} \underline{A}$$

heißt „kinetischer Impuls"

Diese Größe ist zu unterscheiden vom kanonisch-konjugierten Impuls

$$p = m\dot{q} + \frac{e}{c} \underline{A}(q,t)$$

(aus $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$)

- Die entsprechenden Hamilton'schen BWGL führen wieder auf

$$m\ddot{q} = \underline{F}^{Lorentz}$$