# II.13. Hamilton'sche Gleichungen und das Variationsprinzip

**Erinnerung:**

Lagrange-Formalismus

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

Wirkung $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Wirkungsintegral}}$

$\delta S \overset{!}{=} 0$ für die tatsächlich angenommenen Bahnen $q_k(t)$ des Systems

im Integranden:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$$

D.h. die Variation betrifft die $\{q_k\}$ und $\{\dot{q}_k\}$

Die Zeit wird nicht variiert!

$\delta S = 0 \Rightarrow$ Lagrange-BWGL

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

---

Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip:

Idee: Ersetze $L$ im Original-Ausdruck für $S$ durch die inverse Legendre-Transformierte von $H$!

$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right.}_{\substack{\text{Legendre-Transformierte} \\ \text{von } H \text{ bzgl. der } \{p_k\}!}}$$

mit $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$

$$\Rightarrow \underset{\text{Wirkung}}{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right)$$

Zeige nun:

Aus $\delta S = 0$ folgen die Hamilton'schen BWGL falls man wie folgt vorgeht:

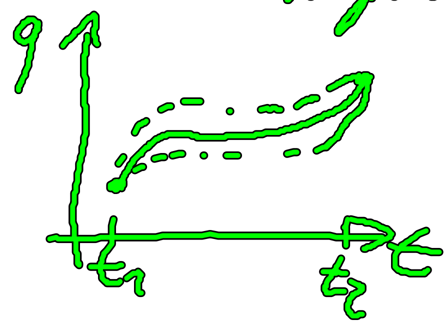
- variiert wird nach $\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}$ $\underbrace{\underline{\text{und}}\ \text{den } \{p_k\}}$!

neu gegenüber der alten Vorgehensweise!

- Es gilt (wie vorher)

$$q_k(t_1) = \text{const}$$
$$q_k(t_2) = \text{const}$$

- Die Zeit wird nicht mit variiert!




Durchführung:

definiere $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, \{p_k\}, t)$

$$= \sum_k p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

Variation:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{F}(\ldots)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big( \mathcal{F}(\{q_k + \delta q_k\}, \{\dot{q}_k + \delta\dot{q}_k\}, \{p_k + \delta p_k\}, t) - \mathcal{F}(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, \{p_k\}, t) \Big)$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k \right) \right) \quad (*)$$

kleine Variation!

---

alternativ mit Parametervariation

$$q_k(t) = \underbrace{\mathring{q}_k(t)}_{\text{tatsächl. Bahn}} + \alpha\, \eta_k(t)$$

$$p_k(t) = \mathring{p}_k(t) + \alpha\, \hat{\eta}_k(t)$$

$$\delta S = \left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha \quad \text{und z.B.} \quad \delta q_k = \left.\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha = \eta_k(t)$$

Zurück zu (*)

$$F = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \; ; \; \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = \dot q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

hier kann man partiell integrieren!

aus (*) folgt:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \underbrace{p_k\,\delta \dot q_k}_{} + \left(\dot q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k \right)\right) \qquad (**)$$

Zweiter Term:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, p_k\,\delta \dot q_k = \int_{t_1}^{t_2} dt\, p_k \frac{d}{dt}\delta q_k$$

$$= \underbrace{\cancel{\left[p_k\,\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}}}_{\text{Null weil}} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\frac{d}{dt}p_k}_{\dot p_k}\,\delta q_k$$

$\left.\begin{array}{l}\delta q_k(t_1) = 0\\ \delta q_k(t_2) = 0\end{array}\right\}$ muß so sein, weil $q_k(t_1) = \text{const}$, $q_k(t_2) = \text{const}$

einsetzen in (**)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \dot{p}_k \delta q_k + \left( \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right) \right)$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \delta S = \int dt \left( \sum_{k=1}^{f} \left( -\left( \frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta q_k + \left( \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right) \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Das muß unabhängig für jede beliebige ~~...~~ Variation $\delta q_k$ und $\delta p_k$ gelten!

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k &= 0 \\ \text{und} \quad \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned} \quad ( \quad .$$

# II.14. Kanonische Transformationen

Hintergrund: Im Lagrange-Formalismus gibt es eine sogenannte „Forminvarianz“

d.h. die Wahl der generalisierten Koordinaten ist nicht eindeutig

$\{q_k\} \longleftrightarrow \{Q_k\}$

umkehrbar eindeutige Transformation

„Forminvarianz“

lässt die Lagrange'schen BWG und damit „die Physik“ <u>invariant</u>!

d.h. $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = 0$ mit $\tilde{L} = L(\{q_k(\{Q_k\},t)\}, \{\dot{q}_k(\{Q_k\},t)\}, t)$

Wichtig für den Hamilton-Formalismus:

Eine solche Transformation der generalisierten Koordinaten ändert auch die kanonisch konjugierten Impulse

$$P_k = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_k}$$

Frage nun:

Unter welchen Transformationen $(\{q_k\}, \{p_k\}) \to (\{Q_k\}, \{P_k\})$ sind die Hamilton'schen BWGL „kovariant"?

D.h., für welche Transformationen folgt mit $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

auch $\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$, $\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$

$\Rightarrow$ „kanonische Transformationen" !

## Motivation für solche Transformationen

Sei in der Lagrange-Funktion die Variable $q_k$ eine zyklische Variable, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Lagrange-BWGL.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

(aber nicht $\frac{d}{dt}\dot{q}_k \stackrel{!}{=} 0$)

d.h. im Lagrange-Formalismus muß $\dot{q}_k$ weiter als Variable „mitgeschleppt" werden!

## Anders im Hamilton-Formalismus

Variable $q_k$ zyklisch $\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{p_k}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} = 0 \Rightarrow p_k$ ist Erhaltungsgröße

Anders ausgedrückt:

$q_k$ zyklisch $\Longleftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

es gilt auch $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$

d.h. $q_k$ ist auch zyklisch im Hamilton-Formalismus

$\Downarrow$

$\dot{p}_k = \cancel{\text{const}}\ 0$

d.h. $p_k$ kann ~~ersetzt~~ werden durch eine Konstante $\alpha_k$

$\Rightarrow$ Das Hamilton'sche System hat also nur $f-1$ Freiheitsgrade ~~...~~

$$H = H(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots q_f,$$
$$p_1, \ldots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \ldots p_f)$$

also $f-1$ Koordinaten und $f-1$ Impulse
+ 1 Konstante

Idee nun:

Lösung eines mechanischen Problems, in dem man schrittweise durch geeignete (d.h. kanonische) Transformationen $q \to Q$ möglichst viele Variablen zu zyklischen Variablen macht!

bester Fall:

Alle Variablen $Q_k$ zyklisch

$$\Rightarrow H = H(P_1, \dots, P_f, t)$$

mit $P_k = \alpha_k = \text{const}$!

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}$$ hängt höchstens noch von der Zeit abhängen (falls $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$)

falls speziell $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$$\dot{Q}_k = \text{const} \quad \Longrightarrow \quad Q_k = a_k t + b_k$$

aus Anfangsbedingung

## Bedingung für kanonische Transformationen

Zur Erinnerung: kanonische Transformationen lassen die Hamilton'schen BWGL (form-)invariant!

$$\{q_k\},\{p_k\} \longrightarrow \{Q_k\},\{P_k\}$$

$$H(\{q_k\},\{p_k\},t) \longrightarrow \hat{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t)$$

(mit $\hat{H}$ entspricht $H$ mit den neuen Variablen

d.h. $\hat{H} = H(\{q_k\{Q_k\}\},\{p_k\{P_k\}\},t)$)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right) = 0 \qquad (1)$$

es muß auch gelten

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t) \right) = 0 \qquad (2)$$

---

mit

$$\tilde{H} = H(\{q_k(\{Q_k\},\{P_k\},t)\},\{p_k(\{Q_k\},\{P_k\},t)\},t)$$

Wir behaupten:

(1) und (2) sind äquivalent,

falls

$$\boxed{\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k P_k - \tilde{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t) + \frac{d}{dt} M_1} \qquad (*)$$

wobei $M_1 = M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$. Diese Funktion $M_1$ heißt „Erzeugende" der kanonischen Transformation

Zeige später:
Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten für die erzeugende Funktion $M$ (diese gehen durch Legendre-Transformationen auseinander hervor!)