# Kanonische Transformationen

$$(\{q_k\},\{p_k\}) \longrightarrow (\{Q_k\},\{P_k\})$$

Unter welche Bedingungen läßt eine solche Transformation die Hamilton'schen Gleichungen „forminvariant"?

(D.h. $\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

$\rightarrow \dot Q_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}$, $\dot P_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k}$ )

$\Rightarrow$ Definition der kanonischen Transformation

Motivation: z.B. Vorhandensein von zykl. Koordinaten $Q_k$ $\frac{\partial H}{\partial Q}$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \rightarrow \dot P_k = 0 \text{ !}$$

$$\Leftrightarrow P_k = \text{const}$$

$$\rightarrow \dot Q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \text{const !}$$

Annahme: alle Koordinaten sind zykl., d.h. alle $P_k = \text{const}$

$$\rightarrow Q_k = a_k t + b_k$$

Konstanten aus den Anfangsbedingungen!

Bedingungen für kanonische Transformationen:

Die Hamiltonschen BWGL folgen aus dem modifizierten Hamiltonschen Prinzip

$$① \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right) = 0$$

man variiert nach $\{q_k\}$, $\{p_k\}$
mit $q_k(t_1) = \text{const}$
$q_k(t_2) = \text{const}$

$$② \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \bar{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t) \right) = 0$$

Behauptung:
① und ② sind „äquivalent"
wenn

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - H = \sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k P_k - \bar{H} + \frac{dM_1}{dt} \quad (*)$$

mit $M_1 = M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$ „Erzeugende" der Transformation

Vorgehen:

a) Zeige zunächst (mit Hilfe von $(*)$), daß die Erzeugende eindeutige Zuordnungen $\{q_k\}, \{p_k\} \rightarrow \{Q_k\}, \{P_k\}$ liefert

$$M_1 = M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$$

$\Rightarrow$ totales zeitl. Differential:

$$\frac{dM_1}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left( \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Einsetzen in ⊛

$$\sum_{k=1}^{f} p_k \dot q_k - H = \sum_{k=1}^{f} P_k \dot Q_k - \bar H + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial q_k} q_k + \sum_{k=1} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \dot Q_k + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{f} \left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k}\right)\dot q_k = \sum_{k=1}^{f}\left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\right)\dot Q_k + H - \bar H + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{f} \left[\left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k}\right)\dot q_k - \left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\right)\dot Q_k\right] + \bar H - H - \frac{\partial M_1}{\partial t} = 0$$

Wie in der Erzeugenden $M_1$ sind hier jetzt $\{q_k\}$ und $\{Q_k\}$ als unabhängige Variable zu betrachten

$\Rightarrow$ Jeder Koeffizient vor $\dot q_k$ und $\dot Q_k$ muß verschwinden!

D.h. $p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k} = 0$ ; $P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = 0$ ; $\bar H = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}$

Umschreiben der beiden ersten

Gleichunge

$$p_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial q_k} = \frac{\partial M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)}{\partial q_k}$$

Zusammenhang $p_k \Leftrightarrow \{q_k\},\{Q_k\}$

auflösen nach $Q_k \Leftrightarrow \{q_k\},\{p_k\}$

(unter der Voraussetzung, daß Zusammenhänge invertierbar sind!)

Kombiniere das mit

$$P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = -\frac{\partial M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)}{\partial Q_k} \xRightarrow{\text{Zusammenhang}} P_k = P_k(\{q_k\},\{p_k\},t)$$

nächster Schritt:

b) Zeige nun, daß mit

$M_1 = M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$ ~~tatsächlich~~

eine kanonische Transformation vorliegt!

D.h. daß aus ① die Gleichung ② folgt

Erinnerung:

① $$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H \right)$$

$$\overset{\circledast}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \bar{H} + \frac{dM_1}{dt} \right)$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_k P_k \dot{Q}_k - \bar{H} \right)$$

$$+ \delta \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dM_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)}{dt}}_{M_1(\{q_k(t_2)\},\{Q_k(t_2)\},t_2) - M_1(\{q_k(t_1)\},\{Q_k(t_1)\},t_1)}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} \delta P_k \dot{Q}_k + P_k \delta \dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \delta P_k \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k(t_2) - \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k(t_1)} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\delta q_k(t_1) = \cancel{\delta q_k}\ \delta q_k(t_2) = 0 \quad !$$

(~~all~~ alle Koordinaten bleiben an den Randpunkten des Integrals konstant)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k \delta P_k + P_k \delta \dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \delta P_k \right) + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Zweiter Term auf der rechten Seite kann partiell integriert werden!

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, P_k \delta \dot{Q}_k = \int_{t_1}^{t_2} dt\, P_k \frac{d}{dt} \delta Q_k$$

$$= P_k \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int dt\, \dot{P}_k \delta Q_k$$

Einsetzen:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} \left[ \left( \dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \right) \delta P_k - \left( \dot{P}_k + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \right] \right) + \sum_{k=1}^{f} \left( \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} + P_k \right) \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

In Schritt a) hatten wir gesehen:

$$P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \quad !$$

(das ist eine der Transformationsgleichungen!)

d.h. $$\sum_{k=1}^{f} \left( \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} + P_k \right) \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \, !$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{k=1}^{f} \left( \dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \right) \delta P_k + \left( \dot{P}_k + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \right)$$

Betrachte nun die $\{Q_k\}$ und $\{P_k\}$ als neue, unabhängige Variable!

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}_\mu = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_\mu}$$

$$\dot{P}_\mu = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_\mu} \quad !$$

Hamilton'sche BWGL in den neuen Variablen!

Betrachte nun weitere Formen der erzeugenden Funktion!

Untersuche dazu die Erzeugende $M_1(\{q_\mu\}, \{Q_\mu\}, t)$

einer Legendre-Transformation bzgl der $\{Q_\mu\}$

$$\mathcal{L}\, M_1(\{q_\mu\}, \{Q_\mu\}, t) = \sum_{\mu=1}^{f} Q_\mu \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_\mu}}_{-P_\mu} - M_1(\{q_\mu\}, \{Q_\mu\}, t)$$

man definiert:

$$M_2 = -\mathcal{L} M_1 = M_1 + \sum_{\mu=1}^{f} Q_\mu P_\mu$$

neue Erzeugende

$$= M_2(\{q_\mu\}, \{P_\mu\}, t)$$

Um zu zeigen, dass die Variablen von $M_2$ ~~tat~~ tatsächlich $\{q_k\}, \{P_k\}, t$ sind, betrachte das Differential:

$$dM_2 = dM_1 + \sum_{k=1}^{f} dQ_k P_k + Q_k dP_k$$

was ist $dM_1$?

Erinnerung an Schritt a)

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{d}{dt} M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$$
$$= \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial t}}_{\overline{H} - H} + \sum_k \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_k}}_{p_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}}_{-P_k} \dot{Q}_k$$

$$\Rightarrow \frac{dM_1}{dt} = \overline{H} - H + \sum_{k=1}^{f} (p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k)$$

$$\Leftrightarrow dM_1 = (\bar{H} - H)\,dt + \sum_{u=1}^{f} (p_u\, dq_u - P_u\, dQ_u)$$

einsetzen in das Differential für $M_2$:

$$dM_2 = dM_1 + \sum_{u=1}^{f} (dQ_u\, P_u + Q_u\, dP_u)$$

$$= (\bar{H} - H)\,dt + \sum_{u=1}^{f} \left(p_u\, dq_u + \cancel{P_u\, dQ_u} - \cancel{P_u\, dQ_u} + Q_u\, dP_u\right)$$

$$\Rightarrow dM_2 = \sum_{u=1}^{f} (p_u\, dq_u + Q_u\, dP_u) + (\bar{H} - H)\,dt$$

d.h. die ~~x~~ Variablen von $M_2$ sind tatsächlich $\{q_u\}, \{P_u\}, t$

Außerdem:

<u>Vergleiche</u> den gerade hergeleiteten Ausdruck für $dM_2$ mit dem Ausdruck

$$dM_2 = d\,M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)$$
$$= \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial M_2}{\partial q_k}\,dq_k + \frac{\partial M_2}{\partial P_k}\,dP_k\right) + \frac{\partial M_2}{\partial t}\,dt \;!$$

(bzw. vergleiche die Koeffizienten von $dq_k$, $dP_k$, $dt$)

man erhält:

$$\left.\begin{aligned} p_k &\overset{!}{=} \frac{\partial M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)}{\partial q_k} \\ Q_k &\overset{!}{=} \frac{\partial M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)}{\partial P_k} \end{aligned}\right\}$$

„explizite" Transformationsgleichungen $\{q_k\},\{p_k\} \longrightarrow \{Q_k\},\{P_k\}$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} \overset{!}{=} \bar{H} - H$$

Die beiden weiteren Erzeugenden $M_3$, $M_4$ erhält man durch weitere Legendre-Transformation

$\Rightarrow$ morgen