

$$M_1 (dq_u, \{Q_u, t\})$$

$$p_u = \frac{\partial M_1 (dq_u, \{Q_u, t\})}{\partial q_u}$$

$$\rightarrow p_u (dq_u, \{Q_u, t\}) \xrightarrow{\text{auflösen}} Q_u$$

$$P_u = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_u} = P_u (dq_u, \{Q_u, t\})$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Weitere Erzeugende

$$\begin{aligned} M_2 (dq_u, \{P_u, t\}) &= -\mathcal{L} M_1 \\ &= -\left(\sum_{u=1}^f Q_u \frac{\partial M_1}{\partial Q_u} - M_1\right) = M_1 + \sum_u Q_u P_u \end{aligned}$$

Vergleich der Differentiale

einerseits

$$dM_2 \rightarrow \sum_u (p_u dq_u + Q_u dP_u) + (\bar{H} - H) dt$$

andererseits:

$$dM_2 = \sum_u \left(\frac{\partial M_2}{\partial q_u} dq_u + \frac{\partial M_2}{\partial P_u} dP_u \right) + \frac{\partial M_2}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow p_u = \frac{\partial M_2}{\partial q_u}, \quad Q_u = \frac{\partial M_2}{\partial P_u}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial M_2}{\partial t}$$

Weitere Erzeugende

1) $M_1(q_u, t)$

2) $M_2(q_u, P_u, t)$

3) $M_3(p_u, Q_u, t)$

Legendre-Transformation von M_1
bezgl. q_u

Beobachtung des Differentials von M_3

$$\Rightarrow q_u = - \frac{\partial M_3}{\partial p_u}, \quad P_u = - \frac{\partial M_3}{\partial Q_u}$$

$$\bar{H} - H = \frac{\partial M_3}{\partial t}$$

$$4) M_4(p_u, P_u, t) = M_1(q_u, t)$$

$$= \sum_u \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_u}}_{p_u} q_u + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial P_u}}_{-P_u} P_u$$

Legendre-Transformation von M_1 bezgl. der
beiden Variablen q_u und P_u !

$$\Rightarrow q_u = - \frac{\partial M_4}{\partial p_u}, \quad P_u = \frac{\partial M_4}{\partial P_u}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial M_4}{\partial t}$$

Beispiele

1) Wähle als Erzeugende

$$M_1(q_{ub}, \{Q_{ub}, t\})$$

$$= - \sum_{k=1}^f q_k Q_k$$

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial t} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \bar{H} = H$$

$$p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k} = -Q_k$$

$$P_k = - \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = q_k$$

$$\text{also } (q_{ub}, \{p_k\}) \longrightarrow (P_{ub}, \{-Q_{ub}\})$$

Das heißt, wir haben eine Vertauschung von ~~Ordnung~~
 Koordinaten und Impulsen erreicht!

Bemerkung:

Diese Vertauschung geht auch

$$\text{mit } M_4(\{p_{ub}, \{P_{ub}, t\})$$

$$= - \sum_{k=1}^f p_k P_k$$

$$\left(\frac{\partial M_4}{\partial t} = 0 \right)$$

$$q_k = - \frac{\partial M_1}{\partial p_k} = P_k$$

$$Q_k = \frac{\partial M_1}{\partial P_k} = -p_k$$

man sieht hier bereits:

Die Koordinaten und Impulse sind in der Hamilton-Mechanik gleichberechtigt variabel

(Symmetrie in der BWGL)

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Beispiel 2)

Wählt als Erzeugende $M_2 (q_k, P_{k, \text{bit}})$

$$= \sum_{k=1}^f q_k P_k$$

wir wissen: $p_k = \frac{\partial M_2}{\partial q_k} = P_k$

„Identische Transformation“

$$Q_k = \frac{\partial M_2}{\partial P_k} = q_k$$

(dasselbe gilt auch mit $M_3 (p_k, Q_{k, \text{bit}}) = - \sum_{k=1}^f p_k Q_k$)

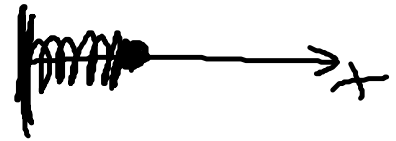
Beispiel 3) Harmonische Oszillatoren

Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = T + V \\ = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$q = x$



Wähle als Erzeugende

$$M_1(q, Q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \cot Q$$

Transformationsgleichung

$$p \stackrel{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial q} = m \omega q \cot Q$$

$$P \stackrel{!}{=} - \frac{\partial M_1}{\partial Q}$$

$$= \frac{m}{2} \omega \frac{q^2}{\sin^2 Q}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}}$$

daraus folgt:

$$q^2 = \frac{zP}{m\omega} \sin^2 Q \iff q = \sqrt{\frac{zP}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$$

einsetzen in die Gleichung

$$\text{für } p: \quad p = m\omega q \cot Q \\ = m\omega \sqrt{\frac{zP}{m\omega}} \cos Q = p(Q, P)$$

Hamiltonfunktion:

$$\bar{H} = H + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial t}}_0$$

$$= H = \frac{(p(Q, P))^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 (q(Q, P))^2$$

$$= \frac{2m\omega^2 P}{2m} \cos^2 Q + \frac{m\omega^2 zP}{2m\omega} \sin^2 Q$$

$$= \omega P (\cos^2 Q + \sin^2 Q)$$

$$\boxed{H = \omega P}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0 \quad !$$

d.h. Q ist zykliche Koordinate

Damit folgt sofort.

$$\dot{P} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q} = 0$$

$$\Rightarrow P = \text{const} = \alpha$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \beta$$

Konstante aus
den Anfangs-
bedingung!

Für die ursprüngliche Koordinate
 q (Auslenkung!) folgt dann.

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta)$$

entsprechend.

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \\ = \sqrt{2\alpha m\omega} \cos(\omega t + \beta)$$

Dieses Beispiel verdeutlicht, daß man mechanische Probleme (im Hamilton-Formalismus) durch Durchführung kanonischer Transformationen vereinfachen kann!

→ man macht die Koordinat(n) zu einer z-fl.-Koordinat!

II.15 Symplektische Strukturen des Phasenraums

Motivation:

Kanon. Transformation → Koordinaten und Impulse können vertauscht werden

→ Koordinaten und Impulse sind im Hamilton-Formalismus nicht voneinander ausgezeichnet!

Verdenkliehe diese Symmetrie nun durch eine neue Notation

Betrachte zunächst ein System mit $f=1$

$f=1 \Rightarrow$ Phasenraum ist zweidimensional

Hamilton-Variablen: q, p

Führe folgende Vektoren ein:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Vektor im
2-dimensionalen
Phasenraum

enthält die partiellen
Ableitungen von H

Führe noch folgende Matrix ein: $\underline{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Damit lassen sich die kanonischen
Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Wie folgt formulieren:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{J} \underline{H}_x \iff \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

Einige Eigenschaften der Matrix J:

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{J}}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{J}} = 1$$

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}} = \frac{1}{\det(\cdot)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{J}}^T = -\underline{\underline{J}}$$

Es folgt:

$$\underline{\underline{x}}^\circ = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{H}}_x \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\underline{\underline{J}}^{-1}}_{-\underline{\underline{J}}} \underline{\underline{x}}^\circ = \underbrace{\underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \underline{\underline{J}}}_{\underline{\underline{1}}} \underline{\underline{H}}_x$$

BWGC

$$\Rightarrow \underline{\underline{H}}_x = -\underline{\underline{J}} \underline{\underline{x}}^\circ$$

außerdem

$$\underline{\underline{J}}^2 = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} (-\underline{\underline{J}}^{-1}) = -\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{J}}^{-1} = -\underline{\underline{1}}$$

v

Verallgemeinerung auf mehrere
Freiheitsgrade ($f > 1$)

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}, \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_f} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$$

$2f$ -dimensionale Vektoren

$$\underline{J} := \left(\begin{array}{c|c} \underline{0}_{f \times f} & \underline{1}_{f \times f} \\ \hline -\underline{1}_{f \times f} & \underline{0}_{f \times f} \end{array} \right)$$

$2f \times 2f$ Matrix

⇒ Hamiltonsche Gleichungen:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{J} \cdot \underline{H}_x$$

Beispiel zur Anwendung der neuen Notation:

Betrachte „autonomes“, lineares System mit $f=1$

H hängt nicht
explizit von der
Zeit ab

→ \underline{H}_x ist linear
in den Variablen!

Das impliziert folgendes „Aussehen“ der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2} (a q^2 + 2b pq + c p^2)$$

verallgemeinertes
harmonisches Oszillator!

(gewöhnl. Oszillator:

$$b=0$$

$$c = \frac{1}{m}$$

$$a = m \omega^2$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{J} \cdot \underline{H}_x$$

$$\text{also } \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aq + bp \\ bq + cp \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bq + cp \\ -aq - bp \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \underline{x} \quad \text{mit } \underline{A} = \begin{pmatrix} b & c \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Konstanten

⇒ Linearität !

Kanonische Transformationen

in kompakter Notation

!?

Erinnerung: Es gibt 4 verschiedene
Erzeugende mit dazugehörige
Transformationsgleichungen

a) $M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$

$$P_m \stackrel{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial q_m} = p_m(\{q_k\}, \{Q_k\}, t) \quad \textcircled{1}$$

$$P_m \stackrel{!}{=} -\frac{\partial M_1}{\partial Q_m} = P_m(\{q_k\}, \{Q_k\}, t) \quad \textcircled{2}$$

Damit ① nach den $\{Q_k\}$ auflösbar ist, muß gelten:

$$\frac{\partial p_m}{\partial Q_H} = \frac{\partial^2 M_H}{\partial Q_H \partial q_m} \neq 0 \quad !$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{\uparrow} = - \frac{\partial P_H}{\partial q_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_m}{\partial Q_H} = - \frac{\partial P_H}{\partial q_m}} \quad (\neq 0) \quad !$$

$\textcircled{*a}$

Analoge Gleichungen folgt ~~für a~~ aus den Erzeugenden!

b) $M_2 (q_{ub}, p_{ub}, t)$

man findet:

$$\frac{\partial p_m}{\partial P_H} = \frac{\partial Q_H}{\partial q_m}$$

*b

$\neq 0$

c) $M_3 (p_{ub}, dQ_{ub}, t)$

\Rightarrow

$$\frac{\partial q_m}{\partial Q_H} = \frac{\partial P_H}{\partial p_m}$$

*c

d) $M_4 (p_{ub}, p_{ub}, t)$

\Rightarrow

$$\frac{\partial q_m}{\partial P_H} = \frac{\partial Q_H}{\partial p_m}$$

*d

Wir benutzen jetzt die neue Notation

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} ; \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

transformierte Koordinaten
und Impulse

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} = \left(\underline{\underline{M}} \right)_{\alpha\beta}$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, 2f$$

man kann zeigen:

$$\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$$

entspricht $*q - *p$!