Kurze Wiederholung

- Kanonische Transformation
$$\{q_\alpha\}, \{p_\alpha\} \longrightarrow \{Q_\alpha\}, \{P_\alpha\}$$
$$\alpha = 1, \ldots, f$$

- Poisson Klammern

$\{f, g\}$

speziell: Zeitentwicklung einer mechanischen Observable:
$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Für kanonische Transformationen bleiben die Poisson Klammern invariant!

Zusammenhang zur QM: $g \to \hat{g}$, $f \to \hat{f}$ Operator
$$\{f, g\} \longrightarrow [\hat{g}, \hat{f}]$$

II. 17. Hamilton-Jacobi-Theorie

Idee: Man hat System mit Hamiltonfunktion $H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$
$$k = 1, \ldots, f$$

Suche kanonische Transformation derart, daß alle neuen Variablen $\{Q_k\}, \{P_k\}$ zeitlich konstant werden!

Erinnerung: Bei der Motivation der kanonischen Transformation hatten wir überlegt:

seien alle ~~Imp~~ Koordinaten zyklisch

d.h. $\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = 0 \Rightarrow \dot{P}_k = 0 \Rightarrow P_k = \alpha_k = \text{const}$

$\forall k = 1, .., f$

$\Rightarrow \bar{H} = \bar{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_f, t)$

$\dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}$ hängt höchstens noch von t ab

falls speziell $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{Q}_k = \text{const}$!

$\Rightarrow Q_k = a_k t + b_k$

Fordere jetzt (zeitliche) Konstanz sowohl der Impulse P_k als auch der Koordinaten Q_k,

d.h. $P_k = \alpha_k = \text{const}$ $\quad (\dot{P}_k = \dot{Q}_k = 0)$

$Q_k = \beta_k = \text{const}$

Die einfachste transformierte

Hamiltonfunktion, die diese Forderung erfüllt ist gegeben durch

$$\boxed{\bar{H} = 0}$$

Erinnerung:

Erzeugende der kanon. Transformation!

$$\bar{H} = H + \frac{\partial M}{\partial t}$$

Hamilton-Funktion in den alten Koordinaten

Frage: Wie wählt man die Erzeugende M?

Zweckmäßige Wahl

$$M = M_2(\{q_k\}, \{P_k\}, t)$$

„Typ II"

Im folgenden ~~defini~~ benutzen wir folgende Notation

$$M_2(\{q_k\}, \{P_k\}, t) = S(\{q_k\}, \{P_k\}, t)$$

„Wirkungsfunktion"

Das ist folgende kanonische Transformation gesucht:

$$\{q_k\},\{p_k\} \longrightarrow \{Q_k\},\{P_k\}$$

$$H \longrightarrow \bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

es muß gelten. (s. Kap. II.14) :(*) $\boxed{p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}\,,\ Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{H} = H\left(q_1,\dots,q_f,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_f},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \overset{!}{=} 0}$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung (HJD)

nichtlineare, partielle Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit!

da H quadratisch von den Impulsen und damit von $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ abhängt

HJD enthält Ableitungen sowohl nach den q_k als auch nach t!

Beachte:

Die HJD enthält nur $f+1$ Variable, d.h. die $\{q_k\}$ und t!

Lösungsschema

a) Formuliere die alte Hamiltonfunktion $H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$, setze $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$ und stelle die HJD auf!

b) Löse die HJD für S als Funktion der $f+1$ Variablen $\{q_k\}, t$

$$\Longrightarrow S(q_1, \dots, q_f, \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_f}_{\substack{\text{zeitlich Konstanten neue Impulse } P_1 \dots P_f}}, t)$$

c) Aus der Tatsache, daß S eine Erzeugende (vom Typ II) ist, folgt:

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 1, \dots, f)$$

$$= \beta_k = \text{const} \qquad \text{(nach Voraussetzung!)}$$

Das sind f implizite Gleichungen für die $\{q_k\}$

$$\Longrightarrow q_k = q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f, t)$$

d) alle Impulse entsprechend aus

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k(\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f, t)$$

e) Bestimmung der Konstanten

$\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f$

Anfangsbedingungen:

$$q_k(t=0) = q_k^0 = q_k(\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f, 0)$$

$$p_k(t=0) = p_k^0 = p_k(\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f, 0)$$

invertieren $\Longrightarrow$ $\alpha_k = \alpha_k(\{q_k^0\}, \{p_k^0\})$

$\beta_k = \beta_k(\{q_k^0\}, \{p_k^0\})$

Einfaches Beispiel zur Anwendung der HJD

freies Teilchen in einer Dimension

a) $H = \frac{p^2}{2m}$ alte Hamiltonfunktion

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$\Rightarrow \text{HJD}: \quad \boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

b) Lösung für S: ("erraten")

$$S(q, \underset{\overset{\shortparallel}{P}}{\alpha}, t) = \alpha q - \frac{\alpha^2}{2m} t + C$$

Konstante

prüfe: $\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = \alpha^2$, $\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\alpha^2}{2m}$

c) Aus der Erzeugenden S folgt

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = q - \frac{\alpha}{m} t$$

$$\overset{!}{=} \beta = \text{const}$$

$$\Rightarrow q(\alpha,\beta,t) = \beta + \frac{\alpha}{m} t$$

d) $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \alpha = P = \text{const}$

„vernünftig" für freie Teilchen!

e) Anfangsbedingungen:

$q^0 = q(\alpha,\beta,0) = \beta$

$p^0 = p(\alpha,\beta,0) = \alpha$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = q^0 + \frac{p^0}{m} t}$$

wie zu erwarten war!

<u>Bemerkungen</u>:

- Physikalische Bedeutung der Wirkungsfunktion:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS(\{q_k\},\{\alpha_k\},t)}{dt}$$

zeitlich konstant!

$$\boxed{\bar{H} = H + \frac{\partial M_2}{\partial t}}$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

beachte: $\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k$ und $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial M_2}{\partial t} = \bar{H} - H$

$= -H$

(da $\bar{H} = 0$ in der Hamilton-Jacobi-Theorie!)

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H$$

$$= L \quad !$$

Lagrangefunktion!

(L ist Legendre-Transformierte von H bzgl. der Impulse)

Integriere:

$$S = \underbrace{\int dt\, L}_{\text{„Wirkungsintegral"}} + \text{const} \quad !$$

- Lösung der HJD für Teilchen in einem Potential

z.B. ~~Os~~ harmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \,, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$\Rightarrow \text{HJD}: \quad \boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Lösung durch Separationsansatz

$$S(q,\underset{\substack{\parallel \\ P}}{\alpha},t) = W(q,\alpha) + V(t,\alpha)$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}_{\text{hängt nur von } q \text{ ab}} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}}$$

$\Rightarrow$ Es muß gelten

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \gamma = \text{const}$$

$$-\frac{dV}{dt} = \gamma \qquad (\text{man sieht später: } \gamma = \alpha = P)$$

Konkrete Rechnung siehe Übungszettel

- Wo wird die HJD angewendet?
  - Teilchen im Zentralfeld
  - " " Schwerefeld

- Systeme, in denen q und p periodische Bewegung im Phasenraum ausführt

- Übergang zur „Wellenmechanik“ in der Quantenmechanik!
  (s. z.B. Nolting)