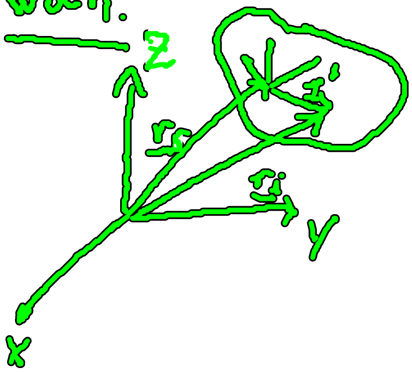
Wdh.




$K$ : raumfest

$K'$ : körperfest

$\underline{r}_s$ : Ortsvektor von $S$ bzgl. $K$

$\underline{r}_i$ : Ortsvektor eines bel. Massenpunktes im Körper bzgl. $K$

$\underline{r}_i'$ : Ortsvektor dieses Massenpunktes bzgl. $K'$

$$\underline{r}_i(t) = \underline{r}_s(t) + \underline{r}_i'(t)$$

K III.2 :
$$\dot{\underline{r}}_i(t) = \dot{\underline{r}}_s(t) + \underline{\omega} \times \underline{r}_i'$$

## III.6. Drehimpuls des starren Körpers

Betrachte : Gesamtdrehimpuls im raumfesten System (diskreter Fall):

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M} \left(\underline{r}_S + \underline{r}_i'\right) \times \left(\underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_i'\right)$$

$$= M\left(\underline{r}_S \times \underline{v}_S\right) + \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{r}_S \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}_i'\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{r}_i' \times \underline{v}_S\right) + \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{r}_i' \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}_i'\right)$$

$$= M\left(\underline{r}_S \times \underline{v}_S\right) + \cancel{\underline{r}_S \times \left(\underline{\omega} \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i'\right)}_{\to 0}\right)} +$$

$$+ \cancel{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i'\right)}_{\to 0} \times \underline{v}_S} + \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}_i'\right)$$

$$\curvearrowright \quad \underline{L} = \underbrace{M\left(\underline{r}_S \times \underline{v}_S\right)}_{\text{Schwerpunktdrehimpuls } \underline{L}^S} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}_i'\right)}_{\text{Relativdrehimpuls } \underline{L}^{rel}}$$

analog im <u>kontinuierlichen</u> Fall:

$$\underline{L} = \underline{L}_S + \underbrace{\int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}') \, \underline{r}' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')}_{\underline{L}^{rel}}$$

<u>Bemerkungen</u>

- im abgeschlossenen System (d.h. ohne äußere Kräfte) ist Gesamtdrehimpuls erhalten:

$$\dot{\underline{L}} = 0$$

- $\underline{L}_S$ hängt ab von der Wahl von $\underline{r}_S$, d.h. von der Wahl d. Ursprungs des raumfesten Systems K
- $\underline{L}^{rel}$ ist dagegen <u>unabhängig</u> von der Wahl des Ursprungs von K

<u>jetzt</u>: Integrand von $\underline{L}^{rel}$ im kontinuierlichen Fall:

Benutze: $\underset{\underset{\underline{r}'}{\uparrow}}{\underline{a}} \times (\underset{\underset{\underline{\omega}'}{\uparrow}}{\underline{b}} \times \underset{\underset{\underline{r}'}{\uparrow}}{\underline{c}}) = \underline{b} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} \, (\underline{a} \cdot \underline{b})$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{L}^{rel} = \int d\underline{r}' \, \rho(r') \left[ \underline{\omega} \, r'^2 - r' (\underline{\omega} \cdot \underline{r}') \right]$$

## Komponentendarstellung

$$(\underline{L}^{rel})_\mu = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left[ (\underline{\omega})_\mu\, r'^2 - (\underline{r}')_\mu (\underline{\omega} \cdot \underline{r}') \right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left[ (\underline{\omega})_\nu\, \delta_{\mu\nu}\, r'^2 - (\underline{r}')_\mu (\underline{\omega})_\nu (\underline{r}')_\nu \right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left[ r'^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu \right] \omega_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} J_{\mu\nu}\, \omega_\nu$$

← Trägheitstensor

**Damit folgt:**

$$\boxed{\underline{L}^{rel} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}}$$

(*)

**Bemerkungen**

- Analogie zu $\underline{p} = m\,\underline{v}$ (lin. Impuls)

**aber:** $\underline{\underline{J}}$ Tensor 2. Stufe $\rightsquigarrow$ $\underline{L}^{rel}$ hat im Allg. nicht dieselbe Richtung wie $\underline{\omega}$!

• Ausnahme: $\underline{\omega} = \omega \, \underline{e}_i$ ← Hauptträgheitsachse

d.h. $\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = J_i \, \omega \, \underline{e}_i = J_i \, \underline{\omega}$

⤳ dann reduziert sich (*) auf

$$\underline{L}^{rel} = J_i \, \underline{\omega}$$

Glg. (*):

$$\leadsto \boxed{T^{rot} = \frac{1}{2}\, \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2}\, \underline{\omega} \cdot \underline{L}^{rel}}$$

## III.7. Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Aus Newton'scher Mechanik:

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}^{ext}$$

↑ äußeres Drehmoment

### Folgerungen für den Relativdrehimpuls

$$\underline{L}(t) = \underline{L}_S(t) + \underline{L}^{rel}(t)$$

Mit $\frac{d}{dt} L_S(t) = \frac{d}{dt}\left(M \underline{r}_S \times \underline{v}_S\right) =$

$$= M \cancel{\dot{\underline{r}}_S \times \underline{v}_S}^{\,0} + M \underline{r}_S \times \dot{\underline{v}}_S$$

$$= M \underline{r}_S \times \ddot{\underline{r}}_S = \underline{r}_S \times \left(M \ddot{\underline{r}}_S\right)$$

$$\curvearrowright \boxed{\frac{d}{dt} L_S(t) = \underline{r}_S \times \underline{F}^{ext}_{tot}}$$

VR: $\frac{d}{dt} \underline{p}(t) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \underline{v}_i(t) = \sum_i m_i \dot{\underline{v}}_i(t)$

$$= \sum_i \underline{F}_i(t) = \cancel{\sum_i \underbrace{\sum_{j \neq i}}_{\text{actio at reactio}} \underline{F}_{ij}(t)}^{\,0} + \underline{F}_i^{ext}$$

$$= \sum_i \underline{F}_i^{ext} = \underline{F}^{ext}_{tot}$$

---

$$\circledast \quad \frac{d}{dt} \underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}^{ext}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \left( \underline{r}_S + \underline{r}_i' \right) \times \underline{F}_i^{ext}$$

$$= \underbrace{\underline{r}_S \times \left( \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{ext} \right)}_{\frac{d}{dt}\underline{L}_S} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{ext}}_{\frac{d}{dt}\underline{L}^{rel}} = \underline{N}^{ext}$$

<u>durch Vergleich</u>:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{L}^{rel} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}_{rel}^{ext}}$$

$\underline{N}_{rel}^{ext}$: äußere Drehmoment im Relativsystem, nur ungleich Null, falls externe Kraft vorhanden.

<u>Beachte</u>: Zeitableitung in obiger Gleichung ist im <u>raumfesten</u> System genommen

$\rightsquigarrow$ Transformation der Zeitableitung ins körperfeste System für beliebigen Vektor $\underline{G}$:

$$\left( \frac{d}{dt}\underline{G} \right)_{Raum} = \left( \frac{d}{dt}\underline{G} \right)_{Körper} + \underline{\omega} \times \underline{G}$$

Anwenden auf den Relativdrehimpuls:

$$\left(\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\right)_{Raum} = \left(\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\right)_{Körper} + \underline{\omega}\times\underline{L}^{rel} = \underline{N}_{rel}^{ext}$$

Mit $\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega}$ und $\left(\frac{d}{dt}\underline{\underline{J}}\right)_{Körper} = 0$

denn: Im körperfesten System bleibt der Trägheitstensor zeitlich konstant!

$$\rightsquigarrow \boxed{\underline{\underline{J}}\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega}\times\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \underline{N}_{rel}^{ext}}$$

„Euler'sche Gleichungen"

Zeitableitung im körperfesten System

Umformulierung der Euler'schen Gleichungen für das Hauptträgheitsachsensystem:

Falls $\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \cdot \underline{j}_i$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{J}}\,\underline{j}_i = J_i \cdot \underline{j}_i$$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \sum_i J_i\, \omega_i\, \underline{j}_i$$

__Folgerung__ : $\dot{\underline{\omega}} = \sum_i \dot{\omega}_i \, \underline{j}_i$

(Hauptachsen sind zeitl. Konstant im Körperfesten System)

__analog__ : $\underline{N}^{ext}_{rel} = \sum_i N_i \, \underline{j}_i$

__Einsetzen in Euler'schen Gleichungen__ :

$$\sum_{i=1}^{3} J_i \, \dot{\omega}_i \, \underline{j}_i + \sum_k \sum_l \omega_k \omega_l J_l \left( \underline{j}_k \times \underline{j}_l \right) = \sum_i N_i \, \underline{j}_i$$

Hauptachsen sind orthogonal zueinander

$\curvearrowright$ Gleichungen zerfällt in Komponenten

$$\curvearrowright \quad J_i \, \dot{\omega}_i + \sum_k \sum_l \omega_k \omega_l J_l \left( \underline{j}_k \times \underline{j}_l \right)_i = N_i$$

$$\forall \; i = 1, 2, 3$$

Summe ausführen (benutze $\underline{j}_1 \times \underline{j}_2 = \underline{j}_3 = -\underline{j}_2 \times \underline{j}_1$ etc.)

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= N_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= N_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= N_3 \end{aligned}}$$

Euler'schen Gleichungen im (körperfesten) Hauptachsensystem.

$\longrightarrow$ Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Nehme an, dass die äußeren Kräfte verschwinden,

$\longrightarrow \quad N_i = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, 3$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= 0 \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= 0 \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= 0 \end{aligned}}$$