Wh: Drehimpuls des starren Körpers

$$\underline{L} = \underline{L}_S + \underline{L}_{rel}$$

Schwerpunkts-anteil

„Relativ-Anteil": unabhängig von der Wahl des Ursprungs von K!

Es gilt: $\underline{L}^{rel} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$

im Allgemeinen hat $\underline{L}^{rel}$ nicht dieselbe Richtung wie $\underline{\omega}$

Ausnahme: $\underline{\omega} = \omega \underline{j}_i$

Hauptträgheitsachse

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = J_i \cdot \underline{\omega}$$

Kinet. Energie: $T_{rot} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\underline{L}_{rel}$

Zeitentwicklung:

$$\frac{d}{dt}\underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{extern} = \underline{N}^{ext}$$

Zeitentwicklung des Gesamtdrehimpuls im raumfesten System

äußeres Drehmoment

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{L}^{rel}(t) = \underline{N}_{rel}^{extern} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{extern}$$

Zeitableitung im raumfesten System

allgemeine Transformationsregel für Vektoren:

$$\frac{d}{dt}\underline{a}\Big|_K = \frac{d}{dt}\underline{a}\Big|_{K'} + \underline{\omega}\times\underline{a}$$

K: raumfestes System
K': körperfestes System

jetzt: $\underline{a} = \underline{L}_{rel}$

$$\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\Big|_K = \frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\Big|_{K'} + \underline{\omega}\times\underline{L}_{rel}$$

$$= \underline{N}^{ext}_{rel}$$

benutze noch: $\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$

$$\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\Big|_{K'} = \underline{\underline{J}}\,\dot{\underline{\omega}}$$

da $\frac{d}{dt}\underline{\underline{J}}\Big|_{K'} = 0$
(Massenverteilung ist in K' zeitunabhängig!)

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{J}}\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega}\times\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \underline{N}^{extern}_{rel}} \quad (*)$$

Euler'sche Gleichungen

$\dot{\underline{\omega}} = \frac{d}{dt}\underline{\omega}\Big|_{K'}$

Umformulierung von (*) in einen Satz skalarer Gleichungen

$$\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \, \underline{j}_i$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i \underline{j}_i \quad ; \quad \underline{N}_{rel}^{extern} = \sum_{i=1}^{3} N_i \underline{j}_i$$

$$\Rightarrow J_i \dot{\omega}_i + \sum_k \sum_l \omega_k \omega_l J_l (\underline{j}_k \times \underline{j}_l)_i = N_i \qquad i = 1, 2, 3$$

explizit:

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= N_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= N_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= N_3 \end{aligned}}$$

Euler'sche Gleichungen im Hauptachsensystem

Nehme im Folgenden an, daß die äußeren Kräfte verschwinden

$$\Rightarrow N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

(1) $J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = 0$

(2) $J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) = 0$

(3) $J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) = 0$

Allgemeine Folgerungen aus ① – ③ im willkürlichen Fall

1) Bilde ① $\cdot \omega_1$ + ② $\cdot \omega_2$ + ③ $\cdot \omega_3$

$$\Rightarrow J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \underbrace{\left[(J_2 - J_3) + (J_3 - J_1) + (J_1 - J_2) \right]}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \right) = 0 \quad !$$

(denn z.B. $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2\right) = J_1 \cancel{\#} \dot{\omega}_1 \omega_1$)

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i^2 \right) = \frac{d}{dt}\left(T_{rot}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Die kinetische Energie der Rotationsbewegung bleibt also im körperfesten System erhalten!

Dieses Ergebnis ($T_{rot} = \text{const}$) hätte man auch folgern können aus ~~der~~ folgender Tatsache:

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt}\left(T^{trans}\right) + \frac{d}{dt}\left(T^{rot}\right) = 0$$

da kräftefreies System!

und $\frac{d}{dt}\left(T^{trans}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(T^{rot}\right) = 0$$

---

2) Bilde nun ① $\cdot J_1 \omega_1$ + ② $\cdot J_2 \omega_2$ + ③ $\cdot J_3 \omega_3$

$$\Rightarrow J_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \underbrace{[\ldots]}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} J_i^2 \dot{\omega}_i \omega_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} J_i^2 \omega_i^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left| \underline{L}_{rel} \right|^2 \Big|_{K'} = 0}$$

Hauptträgheitsachsen (orthonormal!)

denn $\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}}\, \underline{\omega} = \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i \underline{j}_i$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel}^2 = \sum_{ik} J_i \omega_i J_k \omega_k \underbrace{\underline{j}_i \cdot \underline{j}_k}_{\delta_{ki}}$$

$$= \sum_i J_i^2 \omega_i^2$$

Betrag des Vektors $\underline{L}_{rel}$ ist also offensichtlich konstant im rotierenden System!

Beachte: Für das raumfeste System wissen wir natürlich, daß

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} \Big|_{K} = \underline{N}_{rel}^{extern} = 0$$

→ Richtung und Betrag von $\underline{L}_{rel}$ bleiben im raumfesten System also erhalten!

Frage: Ist auch die Richtung von $\underline{L}_{rel}$ im körperfesten System konstant?

$$\underline{L}_{rel} = \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i \underline{f}_i \implies$$ Richtung ist nur dann konstant, wenn $J_i \dot{\omega}_i = 0 \quad \forall i = 1,..,3$!

benutze Euler'sche Gleichungen ① – ③

$$J_i \dot{\omega}_i = 0 \iff \begin{aligned} \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= 0 \\ \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= 0 \\ \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= 0 \end{aligned}$$

Für einen Kreisel mit $J_1 \neq J_2$, $J_1 \neq J_3$, $J_2 \neq J_3$ müssen also zwei Komponenten von $\underline{\omega}$ verschwinden!

$\Rightarrow$ $\underline{\omega}$ muß parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen stehen!

Konsequenz:
Die Richtung von $\underline{L}_{rel}$ in K' ist nur dann konstant, falls $\underline{\omega} \parallel j_i$ $(i=1,2,3)$

Supersymmetrischer Spezialfall

<u>Kugelkreisel</u>: $J_1 = J_2 = J_3 = J$

$$\underline{L}_{rel} = J\,\underline{\omega}$$

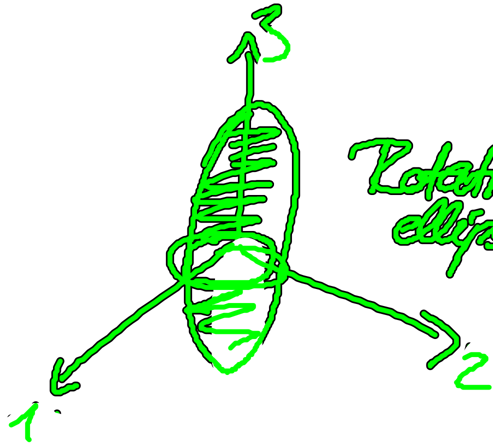
Euler'sche Gleichungen: $J\,\dot{\omega}_i = 0$

$\Rightarrow$ Der Drehimpuls und damit auch die Drehachse sind im körperfesten System (wie auch im raumfesten System) konstant!

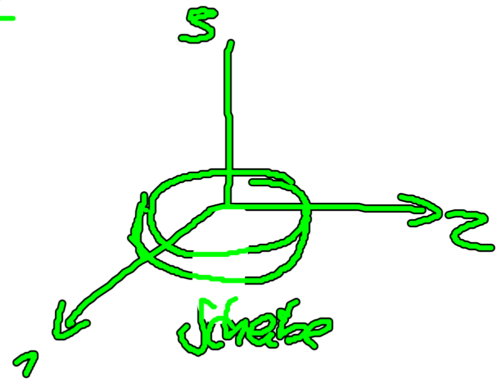
II.8 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

$J_1 = J_2 = J$

$J_3 \neq J$



Rotations-ellipsoid



Scheibe

Kräftefreier Fall:

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

läßt sich dadurch realisieren, daß man den Kreisel im Schwerpunkt aufhängt!

denn dann gilt:

$$\underline{N}_{rel}^{\text{extern}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times (-m_i g \hat{\underline{e}}_z) = \left(\sum_{i=1}^{N} (m_i \underline{r}_i')\right) \times (-g \hat{\underline{e}}_z)$$

benutze: $\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' = 0$

(Schwerpunkt im körperfesten System)!

$$\Rightarrow \underline{N}^{ext}_{rel} = 0$$

Euler'sche Gleichungen:

$$J\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(J - J_3) = 0 \qquad (1)$$

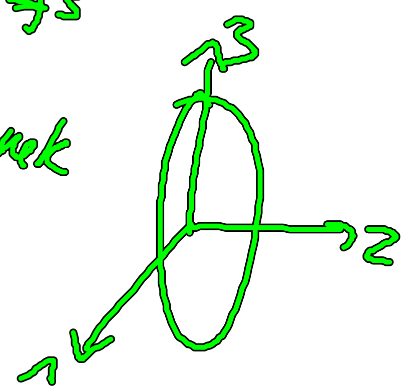
$$J\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3(J_3 - J) = 0 \qquad (2)$$

$$J_3\dot{\omega}_3 = 0 \qquad (3)$$

aus (3) folgt sofort: $\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3$ ist zeitlich konstant!

d.h. die Projektion von $\underline{\omega}$ auf die sogenannte „Figurenachse" $\vec{j}_3$ ist konstant!

ausgezeichnete Achse



betrachte nun (1) und (2)

aus (1): $J\dot{\omega}_1 = (J - J_3)\,\omega_3\omega_2$

$$\Leftrightarrow \dot{\omega}_1 = \frac{J - J_3}{J}\,\omega_3\,\omega_2$$

analog aus (2):

$$\dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J}{J}\,\omega_3\,\omega_1$$

definiere $\omega_0 = \frac{J - J_3}{J}\,\omega_3$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_1 = \omega_0 \omega_2 \quad (a)$$
$$\dot{\omega}_2 = -\omega_0 \omega_1 \quad (b)$$

betrachte 2. Ableitungen nach der Zeit.

$$\ddot{\omega}_1 = \dot{\omega}_0 \omega_2 + \omega_0 \dot{\omega}_2$$

$$\dot{\omega}_0 = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{J - J_3}{J}}_{\text{Konstant in } K'} \omega_3\Big) = 0 \quad \text{da } \dot{\omega}_3 = 0 \;(\text{Gl. } 5)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\omega}_1 = \omega_0 \dot{\omega}_2 \overset{(b)}{=} -\omega_0^2 \omega_1}$$

analog:

$$\boxed{\ddot{\omega}_2 = -\omega_0 \dot{\omega}_1 \overset{(a)}{=} -\omega_0^2 \omega_2}$$

Schwingungsgleichungen

Lösungen:

$$\omega_1(t) = \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau)$$
$$\omega_2(t) = \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau)$$

mit $\omega_\perp$ und τ als Integrationskonstante

und

$$\omega_3(t) = \text{const}$$

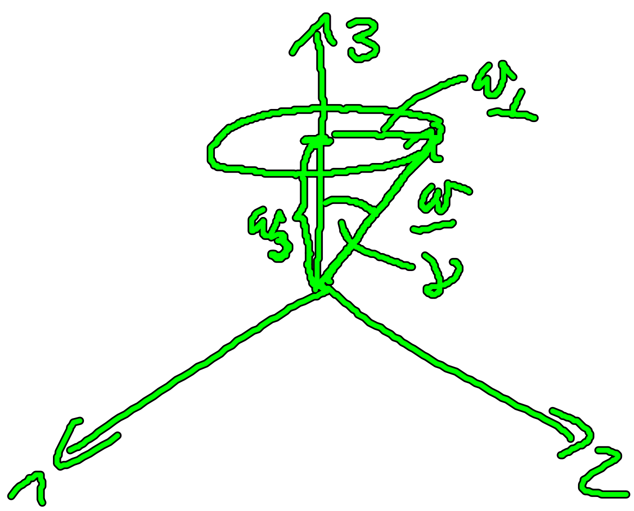
Folgerungen:

• $\omega_1^2+\omega_2^2 = \omega_\perp^2 \big(\underbrace{\sin^2(\ldots)+\cos^2(\ldots)}_{1}\big) = \omega_\perp^2 = \text{const}\,!$

Damit folgt: $\underline{\omega}^2 = \omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 = \text{const}$

Die Drehachse $\underline{\omega}$ hat also konstante Länge — aber nicht eine konstante Richtung!

$\underline{\omega}$ rotiert gleichförmig mit Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die Figurenachse $\left(\omega_0 = \frac{J-J_3}{J}\omega_3\right)$



$\underline{\omega}$ beschreibt einen Kreiskegel („Polkegel") um die Figurenachse mit Öffnungswinkel

$$\tan\vartheta = \frac{\omega_\perp}{\omega_3}$$

Folgerung für den Drehimpuls $\underline{L}$ noch (im körperfesten System)

$$\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

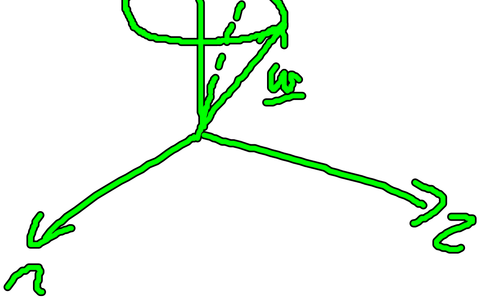
$$= \begin{pmatrix} J \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau) \\ J \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau) \\ J_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

Umschreiben der 3. Komponente.

$$J_3 \omega_3 = J \omega_3 + (J_3 - J) \omega_3$$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = J \cdot \underline{\omega} + (J_3 - J) \omega_3 j_3$$

$\Rightarrow$ Auch der Drehimpuls rotiert (im körperfesten System!) und zwar so, daß die Vektoren $\underline{L}_{rel}$, $\underline{\omega}$ und j_3 zu jedem Zeitpunkt in einer Ebene liegen!



Bewegung im raumfesten System?