Klausur-Anmeldung in Moses.

ab 27.01.10 0^{00} h

bis 01.02.10 23^{59} h

Ablauf am 03.02.

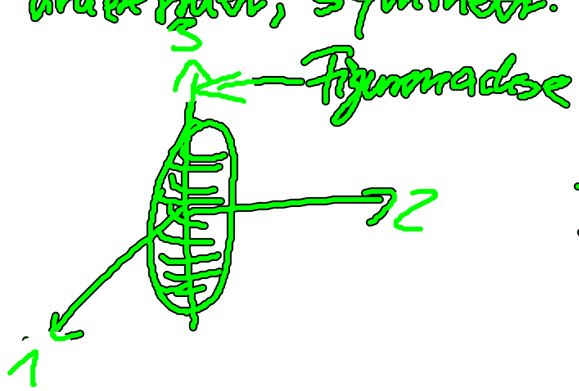
ER 270 Beginn 7^{30}

Studentenausweis, Personalausweis mitbringen!

nicht: Taschenrechner, Papier, keine Unterlagen

aber Stift!

Wh.: Kräftefreier, symmetr. Kreisel



$$J_1 = J_2 = J \neq J_3$$

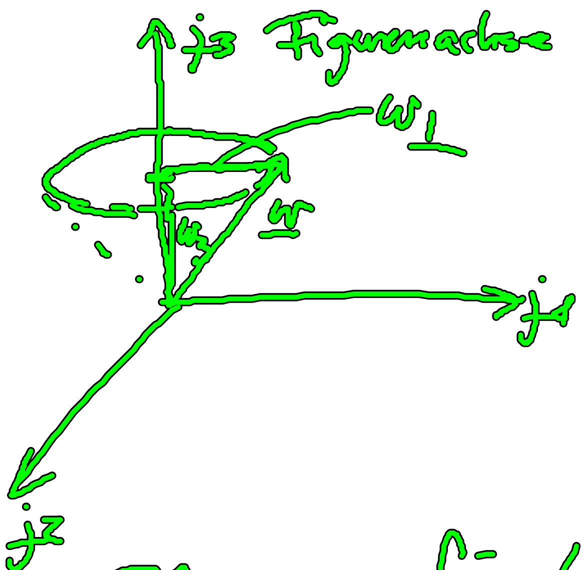
Kräftefrei $\hat{=}$ keine Gravitation

Lösung der Euler'schen Gleichung

$$\Rightarrow \omega_1(t) = \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau)$$
$$\omega_2(t) = \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau)$$
$$\omega_3(t) = \text{const.}$$

$$\omega_0 = \frac{J - J_3}{J}\,\omega_3$$

$\omega_\perp, \tau$ Integrationskonstanten



$\underline{\omega}$ beschreibt Kreiskegel ("Polkegel") um die Figurenachse

Folgerungen für $\underline{L}_{rel}$

$$\underline{L}_{rel} = J\,\underline{\omega} + (J_3 - J)\,\omega_3 \underline{j}_3$$

also rotiert auch $\underline{L}_{rel}$ im körperfesten System, und zwar so, daß $\underline{\omega}$, $\underline{j}_3$ und $\underline{L}_{rel}$ stets in einer Ebene liegen!

Bewegung im raumfesten System

Hier gilt zunächst:

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} \Big|_{K} = 0$$

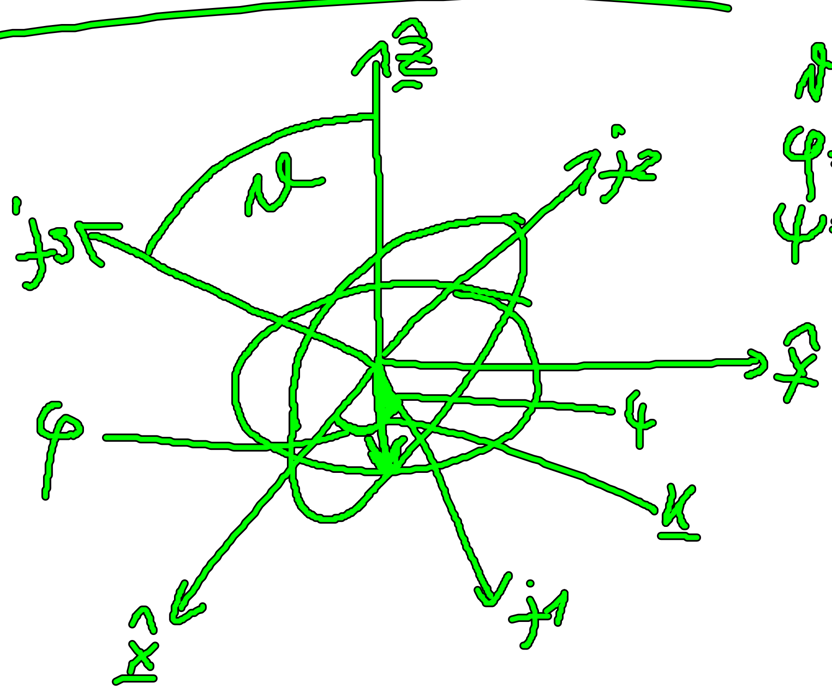
$\Rightarrow$ Drehimpuls bleibt sowohl betragsmäßig als auch richtungsmäßig erhalten!

$\Rightarrow$ $\underline{L}_{rel}$ bildet raumfeste Achse
(typischerweise legt man $\underline{L}_{rel}$ dann in $\underline{z}$-Richtung)

Wie drückt man die Dynamik von $\underline{\omega}$ und von der Figurenachse j_3 bezgl. der raumfesten Achse $\underline{L}_{rel}$ aus?

Dies geht mit den sogenannten

Euler'schen Winkel



$\vartheta = \sphericalangle(\hat{\underline{z}}, j_3)$
$\varphi = \sphericalangle(\hat{\underline{x}}, \underline{K})$
$\psi = \sphericalangle(j_1, \underline{K})$

$\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{y}}, \hat{\underline{z}}$ beschreiben das raumfeste System (K)

j_1, j_2, j_3 körperfestes System K'

$\underline{K}$: „Knotenlinie": Schnittlinie zwischen der $(\hat{x}\hat{y})$-Ebene des raumfesten Systems und der $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$-Ebene des körperfesten Systems!
(d.h. $\underline{K} \cdot \hat{\underline{z}} = 0 = \underline{K} \cdot \vec{j}_3$

Um K und K' zur Deckung zu bringen, geht man wie folgt vor:

i) Drehe um $\hat{z}$ mit dem Winkel φ

$$\Rightarrow \hat{\underline{x}} = \underline{K}$$

(alle Drehungen laufen gegen den Uhrzeigersinn!)

ii) Drehe um $\underline{K}$ mit dem Winkel ϑ

$$\Rightarrow \hat{\underline{z}} = \vec{j}_3$$

iii) Drehe um $\vec{j}_3$ mit dem Winkel ψ

$$\Rightarrow x = \vec{j}_1$$

Jede Rotation kann vollständig durch die Euler'schen Winkel ausgedrückt werden!

Gesamtdrehung:

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}(\psi)\,\underline{\underline{R}}(\vartheta)\,\underline{\underline{R}}(\varphi)$$

drei hintereinander ausgeführte Drehungen!

Zusammenhang mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$?

Rotation des Kreisels bedeutet Änderung der Euler'schen Winkel

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{\varphi} & : \text{Drehung um} & \underline{\hat{z}} \\ \dot{\vartheta} & : \quad " \quad " & \underline{\hat{k}} \\ \dot{\psi} & : \quad " \quad " & \underline{j}_3 \end{array}\right\} \underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{\hat{z}} + \dot{\vartheta}\,\underline{\hat{k}} + \dot{\psi}\,\underline{j}_3$$

drücke nun die Drehachsen $\underline{\hat{z}}, \underline{\hat{k}}, \underline{j}_3$ durch die Hauptachsen des körperfesten Systems aus

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{\hat{z}} + \dot{\vartheta}\,\underline{\hat{k}} + \dot{\psi}\,\underline{j}_3$$

es gilt: $\underline{\hat{z}} = \sin\vartheta \sin\psi\, \underline{j}_1 + \sin\vartheta\cos\psi\,\underline{j}_2 + \cos\vartheta\,\underline{j}_3$

$\underline{\hat{k}} = \cos\psi\,\underline{j}_1 - \sin\psi\,\underline{j}_2$

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \dot{\varphi}\left(\sin\vartheta\sin\psi\,\underline{j}_1 + \sin\vartheta\cos\psi\,\underline{j}_2 + \cos\vartheta\,\underline{j}_3\right) + \dot{\vartheta}\left(\cos\psi\,\underline{j}_1 - \sin\psi\,\underline{j}_2\right) + \dot{\psi}\,\underline{j}_3$$

$$\overset{!}{=} \omega_1\,\underline{j}_1 + \omega_2\,\underline{j}_2 + \omega_3\,\underline{j}_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi \\ \omega_2 &= \dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi \\ \omega_3 &= \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi \end{aligned}} \quad (*)$$

→ Bewegungsgleichungen für die Euler'schen Winkel, falls $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bekannt!

betrachte den Drehimpuls:

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} \Big|_{K} = 0 \qquad \text{setze } \underline{L}_{rel} = L_{rel} \, \hat{\underline{z}}$$

↑ z-Achse des raumfesten Systems

zerlege $\hat{\underline{z}}$ wieder in Beiträge entlang $\hat{\jmath}_1, \hat{\jmath}_2, \hat{\jmath}_3$

$$\begin{aligned} \to \underline{L}_{rel} &= L_{rel} \, \hat{\underline{z}} \\ &= L_{rel} \sin\vartheta \sin\psi \, \hat{\jmath}_1 \\ &\quad + L_{rel} \sin\vartheta \cos\psi \, \hat{\jmath}_2 \\ &\quad + L_{rel} \cos\vartheta \, \hat{\jmath}_3 \end{aligned} \quad (**)$$

schließlich hatten wir gesehen (bei der Diskussion des körperfesten Systems)

$$L_{rel} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = J\underbrace{\omega_1}_{\omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau)} \hat{j}_1 + J\underbrace{\omega_2}_{\omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau)} \hat{j}_2 + J_3 \omega_3 \hat{j}_3 \qquad (***)$$

Kombiniere (**) und (***) mit den Bewegungsgleichungen für die Eulerschen Winkel (*)

$$J\omega_1 \overset{(*)}{=} J\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + J\dot{\vartheta}\cos\psi \overset{!}{\underset{(**)}{=}} L_{rel}\sin\vartheta\sin\psi$$

$$J\omega_2 = J\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - J\dot{\vartheta}\sin\psi \overset{!}{=} L_{rel}\sin\vartheta\cos\psi$$

$$J_3\omega_3 = J_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right) \overset{!}{=} L_{rel}\cos\vartheta$$

nur lösbar mit $\dot{\vartheta} = 0$, d.h. $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$
und $\dot{\varphi} = \text{const}$ (und $\dot{\psi} = \text{const}$)

$\Rightarrow$ Die Gleichungen reduzieren sich auf:

$$\Rightarrow \omega_1 = \dot{\varphi}\sin\vartheta_0 \sin\psi$$
$$= \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau)$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin\vartheta_0 \cos\psi = \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \hat{\tau})$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos\vartheta_0 + \dot{\psi}$$

<u>Lösung</u>:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \hat{\tau} \qquad \text{mit } \omega_0 = \frac{J - J_3}{J}$$

$$\varphi(t) = \frac{\omega_\perp}{\sin\vartheta_0} t + \varphi_0$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad \text{mit } \tan\vartheta_0 = \frac{\omega_\perp J}{\omega_0 J_3}$$

Diskussion (im raumfesten System)

- $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$

  Erinnerung: $\vartheta = \sphericalangle(\underline{\hat{e}}, \underline{j}_3)$

  Achse des Drehimpulses in U — Figurenachse

  (ebenso: φ beschreibt Drehungen um $\underline{e}$)

$\Rightarrow$ Figurenachse bewegt sich also mit konstantem Öffnungswinkel ϑ_0 und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \frac{\omega_\perp}{\sin\vartheta_0}$ um $\underline{L}$ herum

„Nutationskegel"

- $\dot{\psi} = \omega_0 = \dfrac{J - J_3}{J}\,\omega_3$

  Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Körper um $\underline{j}_3$ dreht

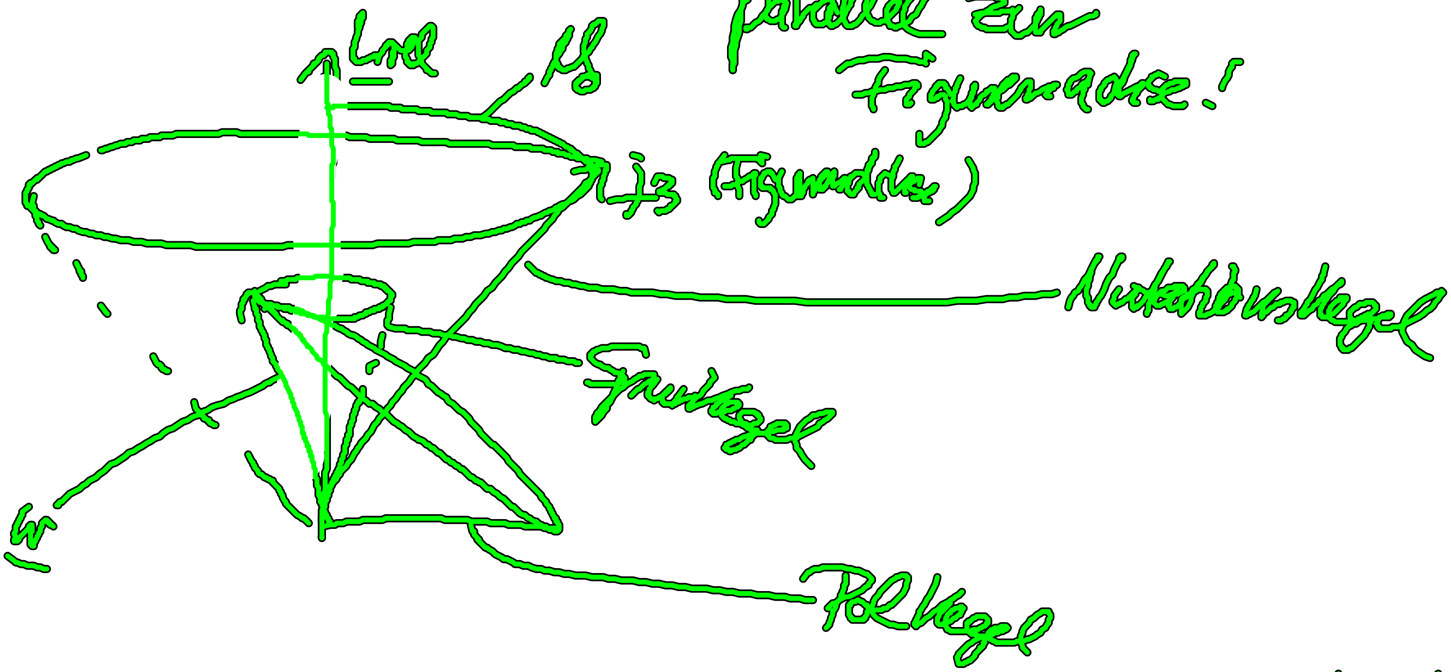
- totale Winkelgeschwindigkeit:

  $\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{\hat{e}} + \dot{\psi}\,\underline{j}_3 \; \cancel{+ \dot{\vartheta}\,\underline{e}}$

  Die Winkelgeschwindigkeit liegt immer in einer Ebene mit $\underline{j}_3$ und $\underline{L}_{ee}$!

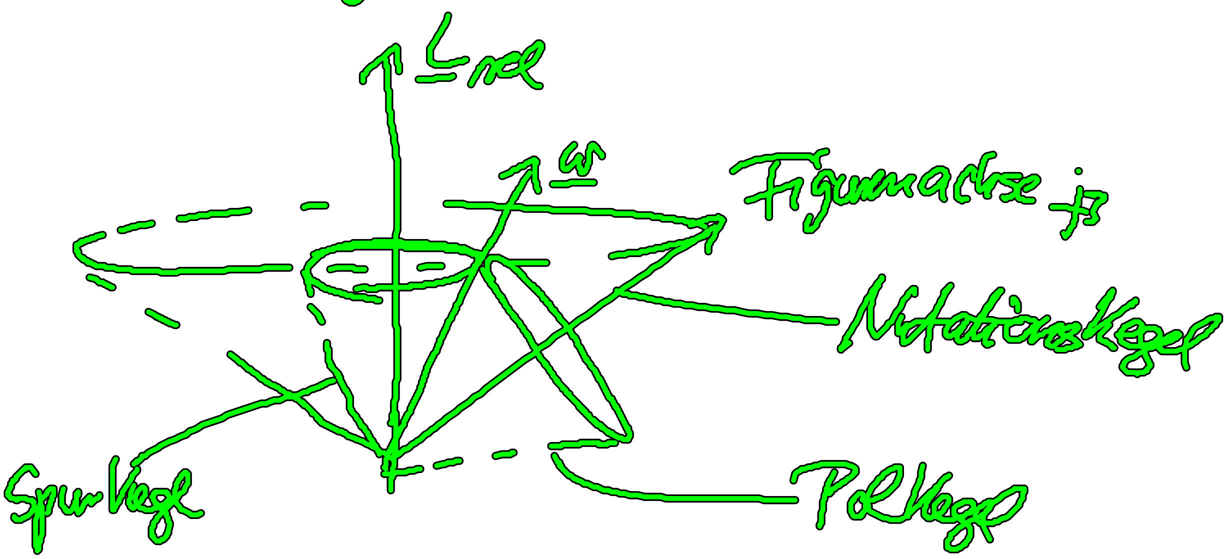
Veranschaulichung

a) $J > J_3$: $\quad \underline{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\,\underline{j}_3$



Polkegel rollt mit seiner Innenfläche auf dem Mantel des Spurkegels!

b) $J < J_3$:



Polkegel rollt mit seiner äußeren Mantelfläche auf dem Spurkegel ab