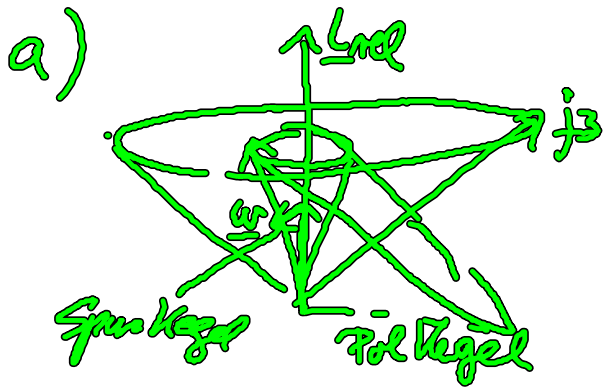


Korrektur zur gehörigen VL:

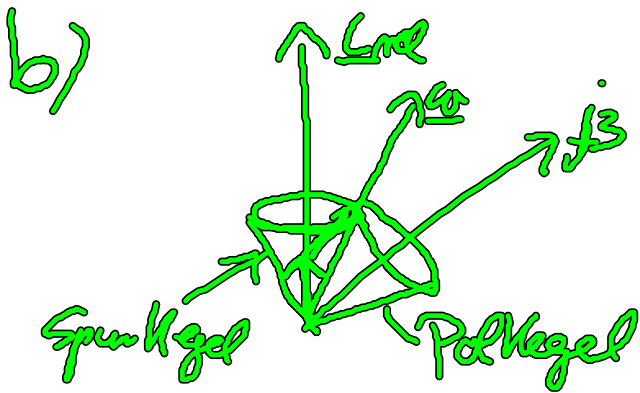


$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \hat{e}_3 + \dot{\psi} j_3$$

$$J < J_3 \quad !$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{J - J_3}{J} \omega_3 < 0$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \dot{\varphi} j_3 \quad \text{antiparallel zu Figurenachs}$$



$$J > J_3$$

$$\dot{\varphi} = \frac{J - J_3}{J} \omega_3 > 0$$

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} j_3 \quad \text{parallel zu Figurenachs}$$

III. 9 Lagrange-Beschreibung des starren Körpers

Zunächst:

generalisierte Koordinaten:

Die drei Eulerschen Winkel

φ, θ, ψ

speziell im

Kräftefreien Fall, $V=0$

$$L = T - V$$

$$L = T = T^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2$$

im Hauptachsensystem

mit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \psi \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\psi} \end{aligned}$$

ZWGL (im kraftfreien Fall) für den Winkel φ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{d}{dt} (J_3 \dot{\omega}_3) - J_1 \omega_1 (\dot{\psi} (-\sin \varphi) + \dot{\varphi} \sin \psi \cos \varphi) - J_2 \omega_2 (-\dot{\varphi} \sin \psi \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi)$$

$$= J_3 \dot{\omega}_3 - J_1 \omega_1 \omega_2 + J_2 \omega_2 \omega_1$$

$$= \boxed{J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = 0}$$

entspricht genau der 3. Euler'schen Gleichung!

analog: Die Lagrange'schen BWG für φ und ψ ergeben gerade die 1. und 2.

Euler'sche Gleichung

→ Konsistenz mit unseren vorherigen (Newton'schen) Überlegungen!

Konjugierte Impulse:

$$P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T^{\text{rot}}}{\partial \dot{\varphi}} = J_3 \omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\varphi}} = J_3 \omega_3$$

(= $J_3 (\dot{\varphi} \cos \alpha + \dot{\psi})$)

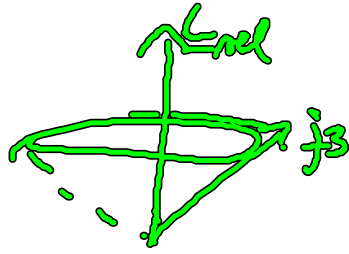
$$T^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\varphi}_i^2$$

d.h. P_φ entspricht der Projektion von L_{rot} auf die Körperachse j_3 -Achse

Bei dem vorher diskutierten symmetr.

Kreisel wenn $\dot{\omega}_3 = 0 \Leftrightarrow \omega_3 = \text{const}$

$\Rightarrow \dot{p}_\varphi = 0$ d.h. p_φ ist Erhaltungsgröße



betrachte nun:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$= J_1 \omega_1 \sin\theta \sin\varphi + J_2 \omega_2 \sin\theta \cos\varphi + J_3 \omega_3 \cos\theta$$

benutze: $\hat{z} = \sin\theta \sin\varphi \hat{j}_1 + \sin\theta \cos\varphi \hat{j}_2 + \cos\theta \hat{j}_3$

$$\Rightarrow p_\varphi = \underline{L}_{tot} \cdot \hat{z}$$

$$\underline{L}_{tot} = \underline{J} \cdot \underline{\omega}$$

Projektion von \underline{L}_{tot} auf die raumfeste z-Richtung!

$\dot{p}_\varphi = 0$ d.h. p_φ ist Erhaltungsgröße
(φ ist zyklisch!)

Schließlid.

$$p_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = J_1 \omega_1 \cos \varphi - J_2 \omega_2 \sin \varphi = \underline{L} \omega \cdot \hat{\alpha}$$

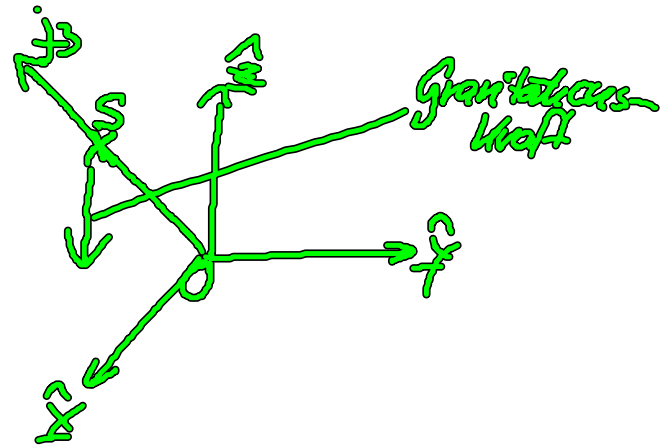
Knotenlinie: $\hat{\alpha} = \cos \varphi \hat{j}_1 - \sin \varphi \hat{j}_2$

Konstruktion der Hamiltonfunktion via Legendre-Transformation.

$$H = \dot{\varphi} p_{\dot{\varphi}} + \dot{\psi} p_{\dot{\psi}} + \dot{\alpha} p_{\dot{\alpha}} - \mathcal{L}$$

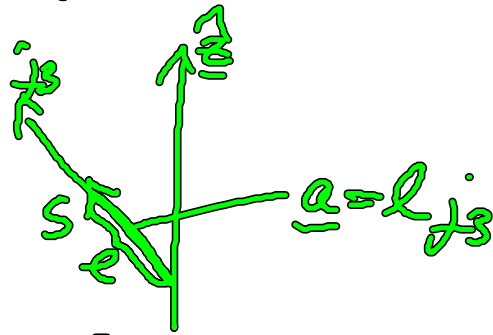
$$(H = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - \mathcal{L})$$

Beispiel: ^{nu}(qualitativ)
 „Schwerer, symmetr. Kreisel“
 Auflagepunkt \neq Schwerpunkt
 (0) (S)



Trägheitsmomente ^{ihre} System mit $S=0$ seien $J_1 = J_2 = J$
 $J_3 \neq J$

neue Trägheitsmomente bezgl. des
Auflagepunkts



benutze Steiner'schen Satz:

$$\tilde{J}_n = J_n + M(\underline{a}^2 - (\underline{a} \cdot \underline{v})^2)$$

$$n=3 \quad \tilde{J}_3 = J_3 + M(l^2 - l^2) = J_3$$

($\underline{v} = \underline{j}_3$)

$$\tilde{J}_1 = \tilde{J}_2 = J + Ml^2$$

(weil hier $\underline{v} \cdot \underline{a} = 0$)

Lagrangefunktion:

$$L = T - V \quad \text{mit } V = Mgl \cos \vartheta$$

$$= \frac{1}{2} \overbrace{(J + Ml^2)}^{\tilde{J}_1 = \tilde{J}_2} (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{J_3}_{J_3} \omega_3^2 - Mgl \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{\mathcal{J}_3}{=} \\
 & = \frac{1}{2} (J + Ml^2 (\dot{\nu}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \nu)) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \mathcal{J}_3 (\dot{\varphi} \cos \nu + \dot{\varphi}) - Mgl \cos \nu
 \end{aligned}$$

φ und ψ sind zyklische Koordinaten
 $\Rightarrow p_\varphi = \text{const}, p_\psi = \text{const}$

qualitativ:

Es stellt sich heraus

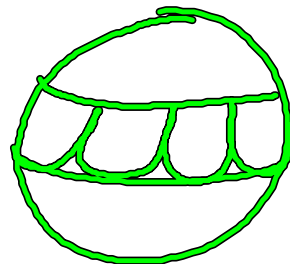
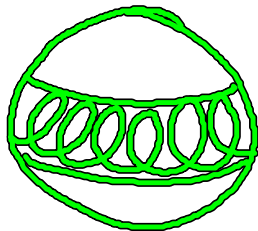
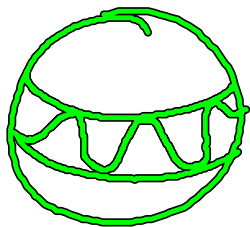
$$\nu = \nu(\epsilon)$$

\uparrow
 Winkel zw. Figurenachsen und Drehimpuls!

genaue Diskussion:
Geldstein

Veranschaulichung

mögl. Schnittkurve der Figurenachsens auf der Einheitskugel



IV. Dynamische Systeme

Fragestellungen:

- Langzeitverhalten eines mechanischen (z.B. periodische) Systems, das kleinen Störungen unterworfen ist
- Abhängigkeiten von äußeren Parametern (Kontrollparametern)
- Konsequenzen von Unstetigkeiten in den Anfangsbedingungen

IV.1. Was ist ein dynamisches System?

→ Allgemeines System von Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Zeit

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

\underline{x} ist der Vektor, der die dynamischen Variablen enthält

\underline{F} : Vektorfeld, das den „Fluss“ des ^{dynamischen} Systems durch Raum und Zeit

speziell: Autonomes dynamisches System

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{x}(t)) \quad \text{keine explizite Zeitabhängigkeit}$$

Beispiele für dynamische Systeme

i) Newton'sches BWGL für ein System mit Reibung
(1-dimensional)

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y, \dot{y}, t)}_{\text{Reibungsterm}} + \underbrace{f_2(y, \dot{y}, t)}_{\text{äußere Kraft}} = 0$$

Reibungsterm äußere Kraft

$$m\ddot{y} = m\ddot{x}_2$$

setze: $x_1 = y \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y}$
 $x_2 = \dot{y} \Rightarrow \dot{x}_2 = -f_1(x_1, x_2, t) - f_2(x_1, x_2, t)$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -f_1(x_1, x_2, t) - f_2(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}$$

2 dynamische Variablen

ii) Hamilton'sches System
(1-dim.)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Koordinate} \\ \text{Impuls} \end{matrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{J} \underline{H}_x \quad \text{mit} \quad \underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{F} \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

2 dyn.
Variablen

(ii) Euler-Lagrange Gleichungen (Wahlform Fall)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{J_2 - J_3}{J_1} w_2 w_3 \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} w_3 w_1 \\ \frac{J_1 - J_2}{J_3} w_1 w_2 \end{pmatrix}$$

3 dyn.
Variablen

Komponenten der Winkelgeschwindigkeit in Körperachsensystem!