

# Dynamische System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

↑  
Fluss

↑  
Vektor, der den Satz dynamische Variablen enthält

Beispiele:

mit  $\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$  für 1-dim System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{J} \underline{H}_x \quad \text{mit} \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder:  $\ddot{\gamma} + f_1 \dot{\gamma} + f_2 = 0$

$\Rightarrow \dot{x}_2 + f_1 x_2 + f_2 = 0$  setze:  $x_1 = \gamma$   
 $x_2 = \dot{\gamma}$

## IV.2. Fixpunkte und Stabilität

betrachte autonomes dyn. System

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{x}(t))$$

keine explizite Zeitabhängigkeit!

Definiere nun den sogenannten Fixpunkt (stationärer Punkt, singulärer Punkt) des dynamischen Systems durch:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^0$$

Diese Bedingung sagt aber noch nichts darüber aus, ob der Fixpunkt stabil, instabil, oder indifferent ist!



## Stabilität des Fixpunkts

Untersuche dazu das Verhalten des Systems bei kleiner Abweichung

$$\underline{dx} := \underline{x} - \underline{x}^0 \text{ vom Fixpunkt}$$

zeitl. Veränderung von  $\underline{dx}$ :

$$\frac{d}{dt} \underline{dx} = \underbrace{\dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x}}^0}_{\text{Null}} = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$$

$$\frac{d}{dt} dx_i = \dot{x}_i - \dot{x}_i^0 = \dot{x}_i = F_i(\underline{x})$$

für die  $i$ -te Komponente von  $\underline{x}$

$$\approx F_i(\underline{x}^0) + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right|_{\underline{x}^0} dx_k + o(|dx|^2)$$

„Lineare Stabilitätsanalyse“

bei Vernachlässigung der Terme  
zweiter und höherer Ordnung in  $\underline{x}$   
ergibt sich mit  $\underline{F}(\underline{x}^0) = 0$

$$\dot{\underline{x}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \bigg|_{\underline{x}^0} dx_k$$

$n$  ist die Anzahl  
der dyn. Variablen

oder kompakt:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$$

mit  $(\underline{A})_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \bigg|_{\underline{x}^0}$

"Jakobi-Matrix" des  
dyn. Systems

System von linearen, homogenen Differentialgleichungen  
1. Ordnung!

Lösungsansatz:

$$\underline{x}(t) = \underline{u} e^{\lambda t}$$

Einsetzen in ~~die~~ die Gleichung  $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$

$$\Rightarrow \lambda \underline{u} e^{\lambda t} = \underline{A} \cdot \underline{u} e^{\lambda t}$$

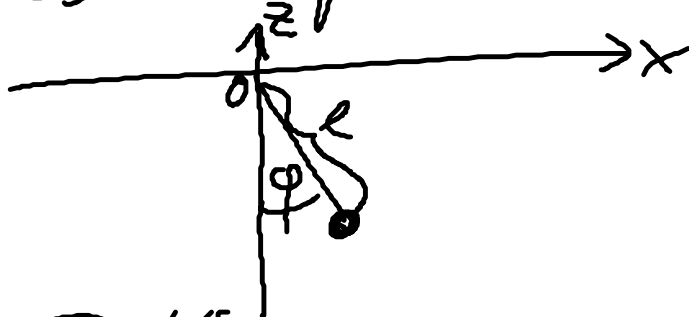
$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{A} \underline{u} = \lambda \underline{u}} \quad \text{Eigenwertgleichung}$$

Die  $\lambda$ 's sind also gerade die Eigenwerte von  $\underline{A}$ ;  $\underline{u}$  sind die entsprechenden Eigenvektoren

$$\Rightarrow \text{Lösung der Gleichung: } \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{u}^{(k)} e^{\lambda_k t}$$

Beispiele:

1) Ebenes Fadenpendel



Lagrangefunktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(\cos\varphi - 1)$$

also:  $V=0$  wenn  $\varphi=0$   
sonst  $V>0$  !

Konjugierter Impuls

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}$$

$$H = \dot{\varphi} p_{\varphi} - L = \frac{p_{\varphi}^2}{2ml^2} - mgl(\cos\varphi - 1)$$

führe ein:

$$x_1 = \varphi$$

$$x_2 = p_\varphi$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2} = \frac{x_2}{ml^2} = F_1$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi = -mgl \sin x_1 = F_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{ml^2} \\ -mgl \sin x_1 \end{pmatrix} \quad \text{Dyn. System}$$

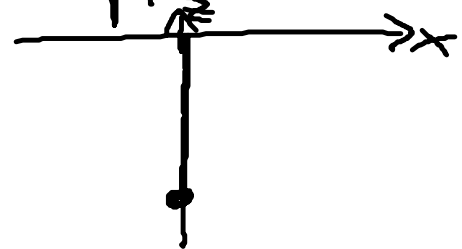
~~Bestimmung~~ Bestimmung der Fixpunkte:  $\dot{x}_1^0 = 0$  ;  $\dot{x}_2^0 = 0$

$$\Rightarrow x_2^0 = 0$$

$$x_1^0 = n\pi \quad \text{mit } n=0, 1, 2, \dots$$

a) Stabilität des Fixpunktes  $x_1 = x_2 = 0$  (Ruhelage)

$$\varphi = 0, \quad p_\varphi = 0$$



$$\underline{\underline{A}}_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \Big|_{x^0}$$

$$\text{hier } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwert von  $\underline{\underline{A}}$  aus  $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \lambda^2 + \frac{g}{l} \\ = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

reine komplexe Eigenwerte!

$$\Rightarrow \underline{\underline{x}}(t) = C_1 \underline{\underline{u}}_1 e^{i\omega t} + C_2 \underline{\underline{u}}_2 e^{-i\omega t}$$

(wobei z.B.  $\underline{\underline{u}}_1 = (1, i\omega ml^2)$ )

ganz normale, ungedämpfte Schwingung

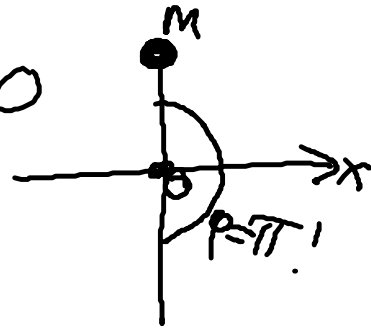
Physikalisch:

Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage führen hier also zu stationären Oszillationen: Die Bewegung kommt nicht zur Ruhe, wird aber auch nicht größer

$\Rightarrow$  Der Fixpunkt  $\underline{\underline{x}}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist stabil

(„Zentrum der Bewegung“)

b) Stabilität des Fixpunkts  $x_1 = \pi, x_2 = 0$



$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mg & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$

man merke!

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \underbrace{C_1 \underline{u}_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t}}_{\text{divergiert für } t \rightarrow \infty} + \underbrace{C_2 \underline{u}_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}}_{\text{verschwindet für } t \rightarrow \infty}$$

$\underline{u}_1$  ist eine  
"abstoßende"  
Richtung

man sagt:  
Die Richtung  $\underline{u}_2$  ist  
eine "anziehende" Richtung

Der ganze Fixpunkt ist instabil, da es eine abstoßende Richtung gibt

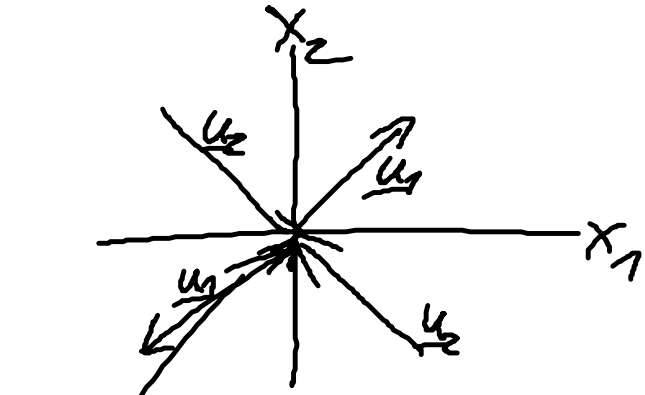


Bild im  
Phasenraum  
 $(x_1, x_2)$   
bes.  $(\varphi, p_\varphi)$

Fixpunkt  
 $x_1=0$   
 $x_2=\pi$

Beispiel 2) : Ebenes Pendel mit Dämpfung

Newton'sche BWG:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi + 2\delta ml^2 \dot{\varphi} = 0$$

$\uparrow$  Reibungskonstante



$$\text{BWGC: } ml^2 \ddot{\varphi} + 2\gamma ml^2 \dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

Setze:  $x_1 = \varphi$   
 $x_2 = ml^2 \dot{\varphi} \quad (= p_\varphi)$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\varphi} = \frac{x_2}{ml^2} = F_1$$

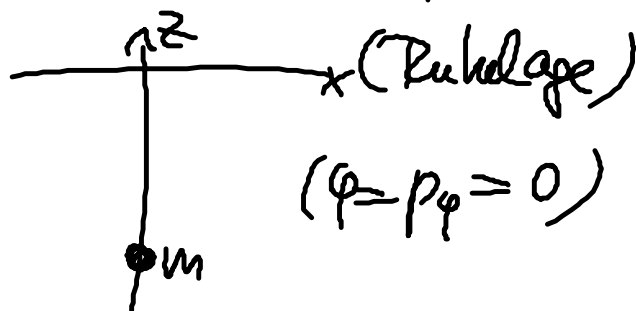
$$\dot{x}_2 = ml^2 \ddot{\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{BWGC}}}{=} -mgl \sin \varphi - 2\gamma ml^2 \dot{\varphi} \\ = -mgl \sin x_1 - 2\gamma x_2 = F_2$$

Fixpunkte: Lage ändert gegenüber dem reibungsfreien Fall!

$$x_1^0 = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$x_2^0 = 0$$

betrachte Stabilität um  $x_1^0 = x_2^0 = 0$



$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m\ell^2} \\ -mg\ell & -2\gamma \end{pmatrix}$$

charakterist. Polynom:

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{1})$$

$$= \lambda^2 + 2\gamma\lambda + g/\ell = 0$$

Fallunterscheidung:

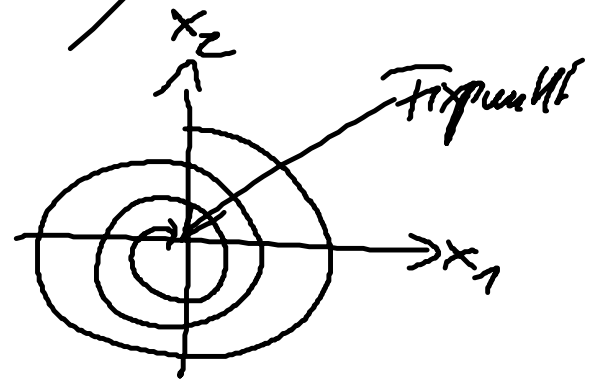
a) Schwache Reibung  $\gamma^2 < g/\ell = \omega^2$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$\delta \underline{x}(t) = e^{-\gamma t} \left( c_1 \underline{u}_1 e^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + c_2 \underline{u}_2 e^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right)$$

„gedämpfte Schwingung“

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \underline{x}(t) = 0$$



Fixpunkt ist (natürlich) wieder stabil!

b) Starke Reibung:  $\gamma^2 > \omega^2 = g/\ell$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

$$\delta \underline{x}(t) = e^{-\gamma t} \left( c_1 \underline{u}_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + c_2 \underline{u}_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \right)$$

„aperiodische gedämpfte Bewegung“

Fixpunkt ist stabil!

Bemerkung:

Falls  $\gamma < 0$ : Jede kleine Änderung von Fixpunkt führt zu einem „Anfassen“ der Bewegung!

$\Rightarrow$  Fixpunkt instabil

Zusammenfassung:

Sind die Realteile aller Eigenwerte der Jacobimatrix negativ, so klingt jede kleine Abweichung von Fixpunkt exponentiell mit der Zeit ab, und man hat einen stabilen Fixpunkt

Beispiel 3)

Kräftekreuz, unsymmetrischer Kreis

$$0 < J_1 < J_2 < J_3$$

hier:  $\lambda_i = \omega_i^2$

Dynamik aus den Euler'schen Gleichungen

$$x_1 = \omega_1, \quad x_2 = \omega_2, \quad x_3 = \omega_3$$

$$\dot{x}_1 = -\left(\frac{J_3 - J_2}{J_1}\right) x_2 x_3 = \overline{F}_1$$

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{J_1 - J_3}{J_2}\right) x_1 x_3 = \overline{F}_2$$

$$\dot{x}_3 = -\left(\frac{J_2 - J_1}{J_3}\right) x_1 x_2 = \overline{F}_3$$

Fixpunkte:

$$x_{10}^0 = (\omega, 0, 0)$$

$$x_{20}^0 = (0, \omega, 0)$$

$$x_{30}^0 = (0, 0, \omega)$$

Rotationen um eine der drei Hauptträgheitsachsen

spezielle Stabilität um  $x_{10}^0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega \\ 0 & \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:  $\lambda_1 = 0$   
 $\lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\left(\frac{J_3 - J_1}{J_2}\right) \left(\frac{J_2 - J_1}{J_3}\right)} \omega$

⇒ Fixpunkt ist stabil

analog für die Richtung  $x_{13}^0$

(Rotation um die Trägheitsachse, die zu  $J_3$  gehört)

Stabilität bzgl.  $x^0$

(Rotation um die Achse,  
die zu  $J_2$  gehört)

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_{2,3} = \pm \omega \sqrt{\left(\frac{J_3 - J_2}{J_1}\right) \left(\frac{J_2 - J_1}{J_3}\right)}$$

Fixpunkt instabil !