

Wkt.:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

autonomes System. $\underline{F}(\underline{x}(t))$

Fixpunkt: $\underline{F}(\underline{x}^0) = 0$

$$\Leftrightarrow \left. \dot{\underline{x}} \right|_{\underline{x}^0} = 0$$

lineare Stabilitätsanalyse: $\dot{\underline{d}}\underline{x} = \underline{A} \underline{d}\underline{x}$

Ansatz:

$$\underline{d}\underline{x}(t) = \underline{u} e^{-\lambda t}$$

$$\underline{d}\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^0$$

kleine
Abweichung!

$$\underline{A} = \left. \frac{\partial \underline{F}_i}{\partial \underline{x}_k} \right|_{\underline{x}^0}$$

$i, k = 1, \dots, n$

einsetzen:

$$\underline{A} \underline{u} = -\lambda \underline{u}$$

$$\Rightarrow \underline{d}\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{u}^{(k)} e^{-\lambda_k t}$$

Sei \underline{x}^0 ein Fixpunkt.

Wenn \underline{x}^0 stabil ist, so hat keine der Eigenwerte der zugehörigen Jakobimatrix

\underline{A} einen positiven Realteil

IV.3 Bifurkationen

Wir betrachten nun Systeme mit einem Kontrollparameter μ
Annahme: Dynamischen Fluss \underline{F} hängt stetig differenzierbar
von μ ab

\Rightarrow Auch die Fixpunkte \underline{x}^0 und die Eigenwerte
von \underline{A} verändern sich stetig mit μ

Bifurkation:

Kritischer Wert μ_c , bei dem sich
die Anzahl der Fixpunkte oder
auch ihre Stabilität schlagartig ändern!

Beispiele:

Beschränkung zunächst auf $n=1$

Annahme: μ reell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, \mu) \\ &= \mu - x^2\end{aligned}$$

Fixpunkte- $\dot{x}^0 = 0 \Rightarrow x_{1,2}^0 = \pm \sqrt{\mu}$

Stabilität: $\delta \dot{x} = A x$ mit $A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x^0} = -2x \Big|_{x^0} = \mp 2\sqrt{\mu}$

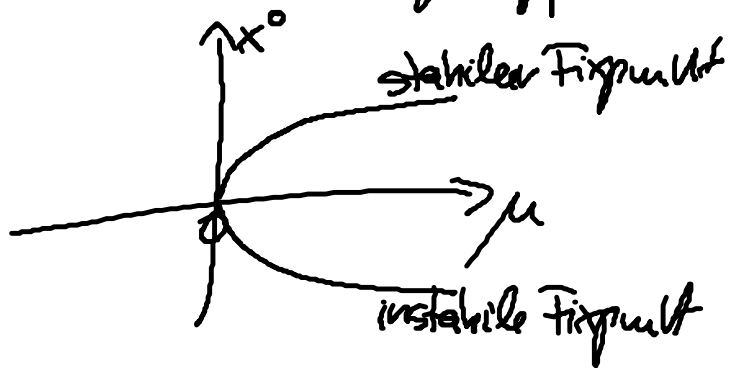
$\Rightarrow x_1^0 = \sqrt{\mu}$ stabil (da $A < 0$)

$$x_2^0 = -\sqrt{\mu}$$

instabil (da $A > 0$)
 $dx(\epsilon) \sim e^{2\sqrt{\mu}\epsilon}$

Falls $\mu < 0$: Es gibt keine stabilen Fixpunkte

$\mu = 0$ bildet Verzweigungspunkt



"Sattel-Knoten-
Verzweigung"

Beispiel

b) Transkritische Bifurkation

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^2 \\ &= \cancel{\mu} x (\mu - x) \rightarrow \text{Fixpunkte:}\end{aligned}$$

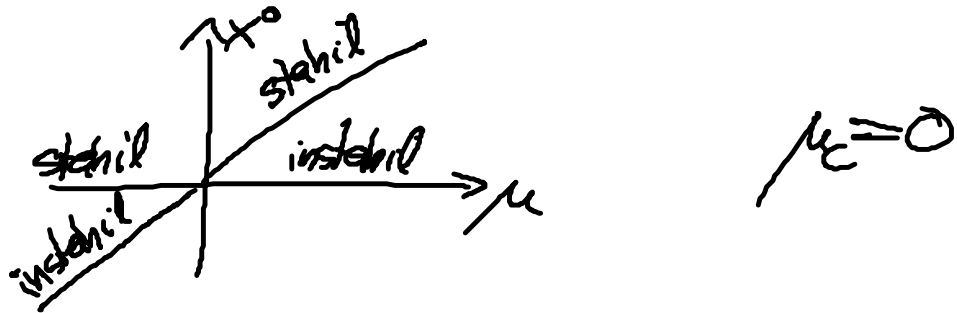
$$x_1^0 = 0$$

$$x_2^0 = \mu$$

$$A = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^0} = (\mu - 2x) \Big|_{x^0}$$

$$\Rightarrow x_1^0 \begin{cases} \text{stabil für } \mu < 0 \\ \text{instabil " } \mu > 0 \end{cases} ; x_2^0 = \begin{cases} \text{instabil } \mu < 0 \\ \text{stabil, } \mu > 0 \end{cases}$$

Illustration:

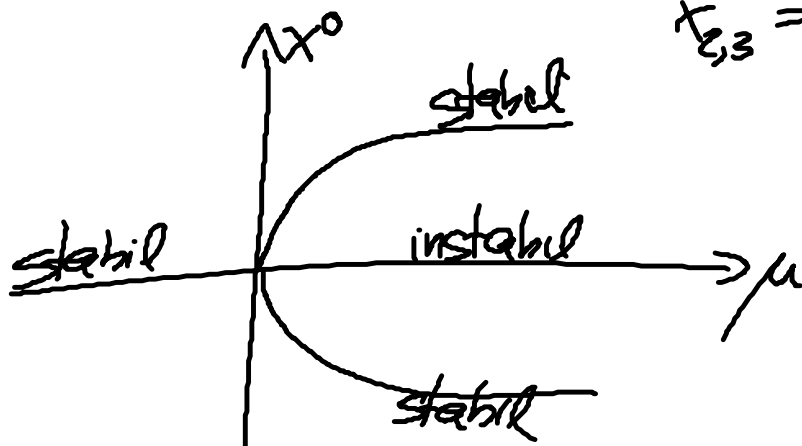


c) "Schwinggabel-Bifurkation"

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2)$$

Fixpunkte: $x_1^0 = 0$

$x_{2,3}^0 = \pm \sqrt{\mu} \quad (\mu > 0)$



$$A = \frac{dF}{dx} \Big|_{x^0} = (\mu - 3x^2) \Big|_{x^0} \Rightarrow x_i^0 \text{ stabil für } \mu < 0$$

Beispiel $n=2$

Hopf-Bifurkation

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = \mu x_2 + x_1 - (x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{cases}$$

Vereinfachung durch Polarkoordinaten

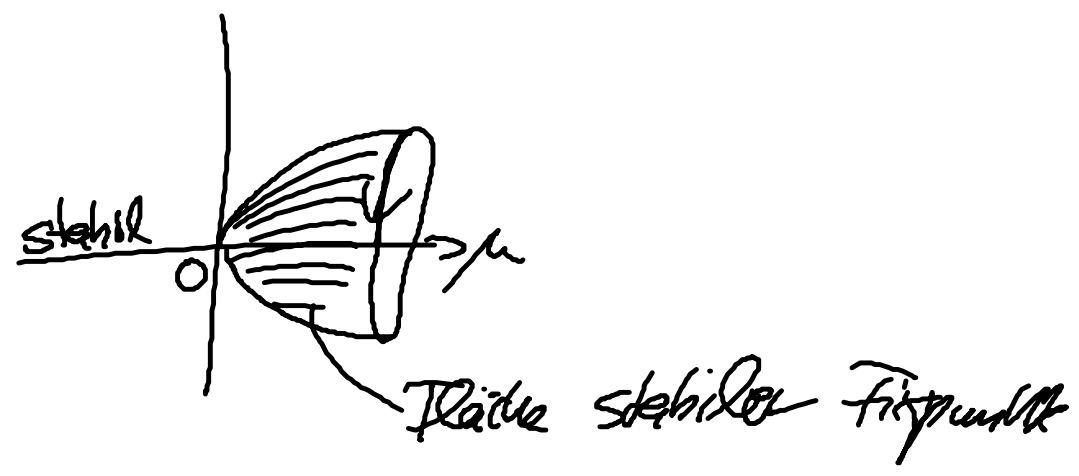
$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \\ x_2 &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

→ $\dot{r} = \mu r - r^3 \longrightarrow$ bei $\mu = 0$ Strömungsfeld-Bifurkation

$$\dot{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = t + \text{const}$$

r und φ entkoppelt

Illustration der Hopf-Bifurkation



IV.4. Lyapunov-Exponenten

Eine Bewegung (Trajektorie) heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt

Betrachte System in 2 Raumdimensionen

Bahn des Teilchens sei durch $\phi(t)$ beschrieben

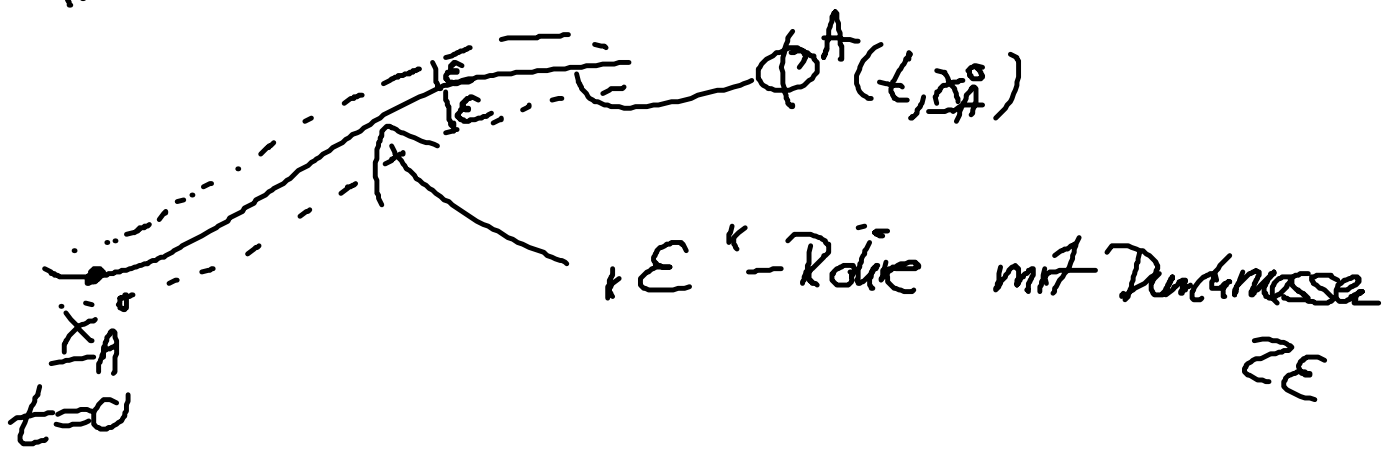
Betrachte: Teilchen der Masse m_A

$\phi^A(t, \underline{x}_A^0)$ Bahn des Teilchens mit Startwert \underline{x}_A^0 bei $t=0$

es gebe nun eine weitere Bahn in der Nähe

$\phi^B(t, \underline{x}_B^0)$ \underline{x}_B^0 Startpunkt bei $t=0$

a) „bahnstabil“



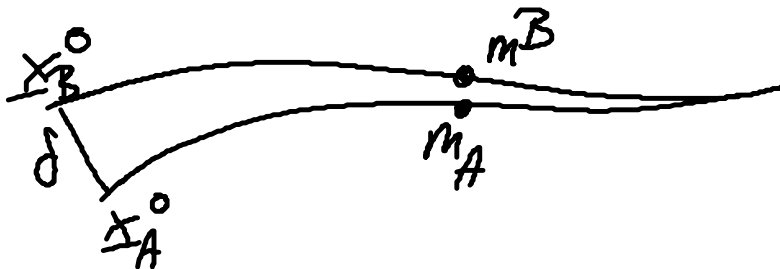
Die benachbarte Bahn ϕ^B bleibt für alle Zeiten in einer ϵ -Röhre um die Bahn ϕ^A

b) „asymptotisch stabil“



Der Abstand der Bahnen verschwindet für $t \rightarrow \infty$

c) „Lyapunov-stabil“



Der Abstand der aktuellen Positionen verschwindet für $t \rightarrow \infty$

~~Diese~~ Wie kann man beschreiben (quantifizieren),
ob sich Bahnen aufeinander zu- oder
wegbewegen? \rightarrow Lyapunov-Exponent

Vorgehensweise: Linearisierung der Dynamik um eine
Lösung $\phi(t, x_A)$

Idee (Details z.B. bei Schick)

$$|\phi(t, x_A^0) - \phi(t, x_B^0)| \sim e^{\tilde{\lambda} t}$$

wobei $x_B^0 = x_A^0 + \delta$, δ klein

$\tilde{\lambda}$: „führende Lyapunov-Exponent“

2 Fälle:

$\tilde{\lambda} < 0$: Kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen
werden exponentiell gedämpft.

$\tilde{\lambda} > 0$: Exponentielles Auseinanderlaufen
 \rightarrow Chaos