Elektrodynamik

Sprechstunde: Die 13-14

andreas.knorr@physik.tu-berlin.de

Inhalt:

- Historisches

- Begriffe der Feldtheorie
- Maxwellgleichg., Versuch einer Herleitg. aus der Quantenmechanik
- grundlegende Struktur und Erhaltungssätze
- formale Lösungen → Wellenausbreitung
- Materie als Quelle der Maxwellgl.
- Felder v. Punktladungen
- WW von Materie - Felder (Metalle, Isolatoren ...)
- Erzeugg. v. elektromagn. Strahlg.
- Optik: Brechg., Reflexion, Streuung, Beugung
- Führung / Speicherg. v. Wellen
- relativistische Formulierg. der Maxwellgl.
- Quantisierung d. Lichts
- Einführg. in Laser / nichtlineare Optik

1) Historische Bemerkungen

- C. A. Coulomb (1736 - 1806) Kraftgesetz
- J.P. Biot (1774 - 1862), S. Savart (1791 - 1841)
  Magnetfeld von Strömen
- M. Faraday (1791 - 1867) Induktionsgesetz
- J. C. Maxwell (1831 - 1879)
  vereinheitlichte Feldtheorie (El + Mag)
- H. A. Lorentz (1853 - 1928)

  Kraft auf Ladg. im Feld

- H. Hertz (1857 - 1894) elektromagn. Wellen
- A. Einstein (1879 - 1955) Elektrodynamik
  bewegter Körper
- W. Heisenberg (1901 - 1976)
  Quantisierg. der Ladungsträger

- P. Dirac (1902 - 1984)

  Quantisierung d. em. Felds

- N. Basov, C. Schawlow, C Townes

  Laser ($\sim$ 50er Jahre)

- heute: Manipulation einzelner Photonen

  J. Kimble, A. Zeilinger

Elektrodynamik

Felder E, B
Maxwellgleichungen

$\longleftrightarrow$

Ladungen, bewegt
Lorentzkraft
(Schrödingergl.
Newtongl.)

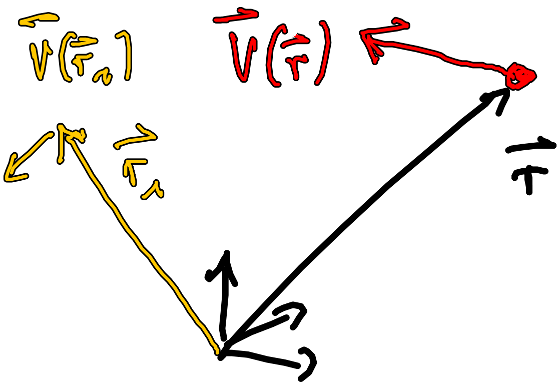
Feld- und Ladungsdynamik
muß selbstkonsistent gelöst werden

z.B. Strahlungsdämpfung

2.) Erinnerg. an die Begriffe der Feldtheorie

2.1. Vektorfelder haben Charakter

elektromagnetische Effekte werden typischerweise über Felder beschrieben (Raum / Zeitpunkt)



$t = $ konstant (Schnappschuß)

• physikalische Größe

mögl. auch Zuordng. eines Skalars $\phi(\vec r)$

<u>Frage</u>: wie kann man solche Felder charakterisieren?

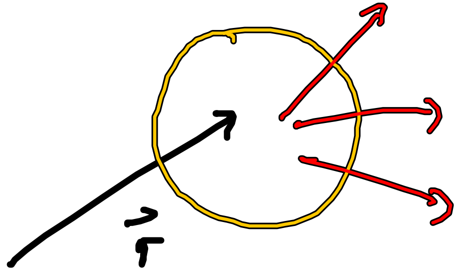
die Größen zur Charakterisierg. heißen

Quellendichte, Wirbeldichte und

werden mit Nablaoperator $\vec\nabla = \vec e_x \partial_x + \vec e_y \partial_y + \vec e_z \partial_z$

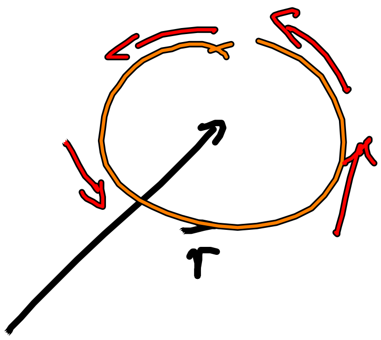
(symbolische Schreibweise)

Quelldichte eines Felds „div $\vec V(\vec r)$“



quellen die Feldlinien aus dem Punkt oder versinken sie?

Wirbeldichte eines Feldes „rot $\vec V(\vec r)$"



wirbeln die Feldlinien am Punkt $\vec r$?

2.2. Quell- und Wirbeldichte

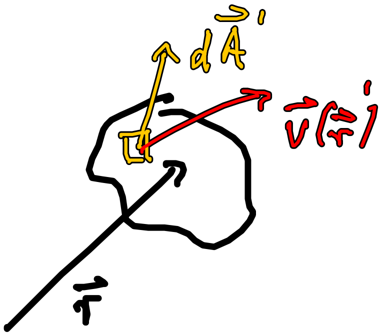
2.2.1. Quelldichte eines Vektorfeldes

berechne den Fluß eines Feldes $V(\vec r)$ durch die geschlossene Oberfläche um den Punkt $\vec r$ um das Volumen V, $V \to 0$ und Bezug auf V

Quelldichte: $\lim\limits_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\vec{A}' \cdot \vec{V}(\vec{r}') = \mathrm{div}\, \vec{V}(\vec{r})$

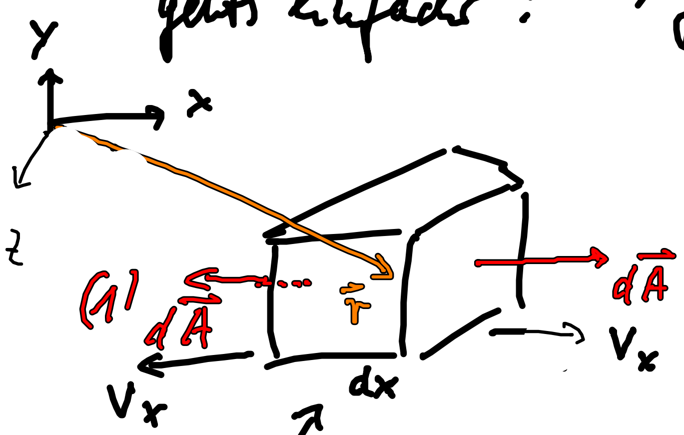
pro Volumen

Oberflächenintegral um $\vec{r}$ herum



sammelt alle Beiträge auf und „zählt" die durchstoßenden Feldlinien (Netto!)

gehts einfacher? → ja, in Koordinaten!



Kleiner Würfel

Richtg. d. Oberflächenelements 1

$$\mathrm{div}\, \vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{dx\, dy\, dz} \Big(-V_x\left(x - \tfrac{dx}{2}, y, z\right) dy \cdot dz$$

Oberfl.element 1

Würfelvolumen

$$+ V_x\left(x + \tfrac{dx}{2}, y, z\right) dy\, dz \Big)$$

+ y- Richtg , z- Richtg

$$= \lim_{\substack{V\to 0\\ dx\to 0}} \frac{1}{dx\,\cancel{dy}\,dz}\left(-\cancel{V_x(x)} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\cancel{\frac{dx}{2}}\,dy\,dz + \cancel{V(x)} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\,\frac{\cancel{dx}}{2}\,\cancel{dy\,dz}\right.$$

$$\left. + \text{ y-, z- Richtg analog}\right)$$

$$= \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z$$

$$= \vec\nabla\cdot\vec V(\vec r)$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec V = \vec\nabla\cdot\vec V(\vec r)}$$

__Beispiel__: suchen ein elektrisches Feld ohne Divergenz mit Kugelsymmetrie:

$$\vec\nabla\cdot\vec E = 0 \quad , \quad \vec E = f(r)\,\vec e_r$$

$$0 = \vec\nabla\cdot\vec E = \left(\vec e_r\,\partial_r + \vec e_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\,\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\partial_\varphi\right)\cdot\left(f(r)\,\vec e_r\right)$$

$$= \partial_r f(r) + f(r)\,\frac{1}{r}\,\vec e_\vartheta\cdot\vec e_\vartheta + \vec e_\varphi\cdot\frac{f(r)}{r\sin\vartheta}\,\sin\vartheta\,\vec e_\varphi\Big)$$

$$\left(\partial_\vartheta \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta \quad , \quad \partial_\varphi \vec{e}_r = \sin\vartheta \, \vec{e}_\varphi \right)$$

ohne Beweis, siehe ÜA)

$$0 = 2f + r\,\partial_r f$$

Konstante

$$\Rightarrow f(r) = \frac{c}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{c}{r^2}\,\vec{e}_r$$

ist das Feld einer Punktladg.

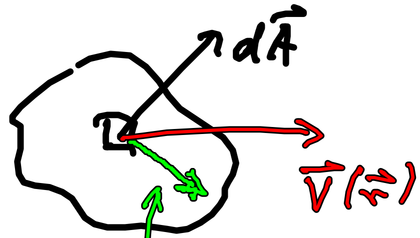
2.7.2. Rotation eines Vektorfelds

um die Wirbel um $\vec{r}$ zu bestimmen

geht man von der Zirkulation auf der

Oberfläche um $\vec{r}$ aus:

Wirbeldichte $\quad \operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{(V)} d\vec{A}' \times \vec{V}(\vec{r}')$



Anteil auf der Oberfläche um zu sehen, was „drum rum läuft"

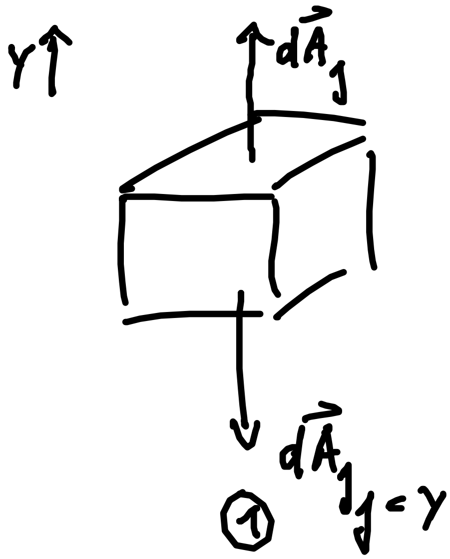
einfachs wieder in kartesisch Koordinaten:

$$(\operatorname{rot} V)_i = \frac{1}{dx\,dy\,dz} \Big(-\varepsilon_{ijk}\, dA_j V_k\big(\vec{r} - \tfrac{dx_j}{2} \vec{e}_j\big)$$

(1)

$$+ \varepsilon_{ijk}\, dA_j V_k\big(\vec{r} + \tfrac{dx_j}{2} \vec{e}_j\big) \Big)$$

i: $(x, y,$ oder $z)$



$$= \frac{1}{dx\,\cancel{dy}\,dz}\, \varepsilon_{ijk}\, \cancel{dx_i\, dx_k} \cdot dx_j\, \partial_{x_j} V_k$$

dx_j: von Taylor

$$= \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) \right)_i$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})}$$

2.3. Vektoridentität

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f(\vec{r}) \right) = 0 \, , \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) \right) = 0$$

siehe ÜA

2.4. Helmholtz Theorem

Jedes Vektorfeld kann in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil aufgeteilt werden

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_t$$

die Unterscheidung in longitudinale u. transversale Felder ist wie folgt:

Wenn $\vec{k}$ der Wellenvektor (Ausbreitungsrichtg) dann für „l": $\vec{k} \parallel \vec{V}_k$ ← Fouriertransformierte der Felder im Ort

„t": $\vec{k} \perp \vec{V}_k$

genaue Formel in der Ü A

$$\vec{V}_l = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi} \int d{r'}^3 \, \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right)$$

$$\vec{V}_t = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int d{r'}^3 \, \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{V}_l$$

Alle Felder sind durch Angabe der Quellen- und Wirbeldichte eindeutig bestimmt. → Maxwellgl.