3.5 Die vollständigen Gleichungen des elektromagnetischen Felds

Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$$

Quelldichte von $\vec{E}$ prop. zu Ladungsdichte ρ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Quelldichte von $\vec{B}$ verschwindet
(Keine Anfangs- bzw Endpunkte von Feldlinien)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Wirbeldichte von $\vec{E}$ gegeben durch zeitliche Ändrg. d. Magnetfelds

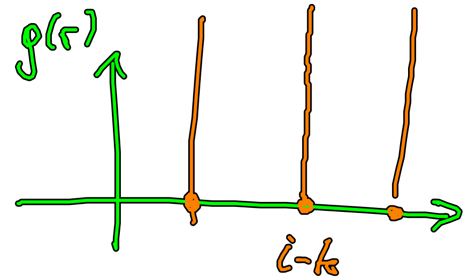
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wirbeldichte von $\vec{B}$ wird durch Stromdichte und zeitliche Ändrg. d. elektrischen Felds bestimmt

Zur selbstkonsistenten Lösung muß man Materialgleichungen zu den Feldgleichungen (Maxwell) hinzufügen

$$\underbrace{\rho = q|\psi|^2, \quad \vec{j} = \frac{q}{2m} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right) \psi + \text{k.k.}}_{\text{quantenmechanisch durch Schrödingergleichung bestimmt}}$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \, \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_i(t)\right)$$



Punktladg.

ist klassische Definition eines Systems von Punktladungen. Volumenintegral gibt die Ladung im betrachteten Raumbereich

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

gesucht noch $\vec{r}_i(t) = ?$

Newtongleichung: $$\frac{d}{dt}\left(m \dot{\vec{r}}_i(t)\right) = \vec{F}(\vec{r}_i, t)$$

Lorentzkraft auf Teilchen mit Ladg. q im em. Feld

3.6. Klassifizierg. v. Beschreibungen

a) „Quantenelektrodynamik, Quantenoptik"

Teilchen + Feld quantenmechanisch

b) „halbklassische Theorie"

Teilchen: quantisiert, Feld: klassisch

c) „klassische Elektrodynamik"

beide klassisch

3.7 Bilanzen

gibt es analog zur klassischen Mechanik Bilanzen, also

$$\frac{d}{dt} X = \text{Quellterme} \quad (= 0 \rightarrow \text{Erhaltungssatz}) \;?$$

3.7.1. Ladungsbilanz (Kontinuitätsgleichung)

Ladung und Strom sind miteinander verbunden:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_i q_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

$$= \sum_i q_i \, \delta(x - x_i(t)) \, \delta(y - y_i(t)) \, \delta(z - z_i(t))$$

Bilanz der Ladungsdichte

$$\partial_t \rho(\vec{r},t) = \sum_i q_i \Big\{ \Big[\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x_i(t))\Big](-\dot{x}_i) \, \delta(y - y_i) \, \delta(z - z_i)$$

$$+ \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - y_i)(-\dot{y}_i) \, \delta(z - z_i)$$

$$+ \delta(x-x_i)\,\delta(y-y_i)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\delta(z-z_i)\,(-\dot z_i)\Big\}$$

$$= -\sum_i q_i\, \vec\nabla\, \delta(\vec r-\vec r_i)\cdot \dot{\vec r}_i$$

$$= -\vec\nabla\cdot\sum_i q_i\, \dot{\vec r}_i\, \delta(\vec r-\vec r_i) = -\vec\nabla\cdot\vec j$$

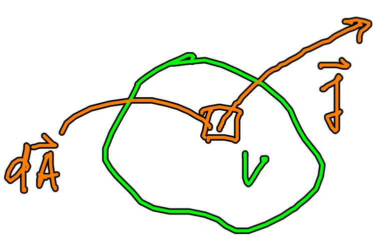
$$\boxed{\partial_t \rho + \vec\nabla\cdot\vec j = 0}$$

Kontinuitätsgleichung

$\vec j$: Strom- u. Ladungsdichte

zeitliche Änderung der Ladungsdichte zieht Entstehung / Vergehen von Feldlinien der Stromdichte nach sich.

Interpretation:



$\partial(V)$ – Oberfläche

$$\int dV\, \dot\rho + \int dV\, \vec\nabla\cdot\vec j = 0$$

Satz von Gauß

$$\dot Q + \oint_{\partial(V)} d\vec A\cdot\vec j = 0$$

$$Q = \int dV \, \rho \qquad \underbrace{\hphantom{xxxx}}_{I\text{ - Strom durch } (V)}$$

Gesamtladg. im Volumen

$$\boxed{\dot{Q} = -I}$$

Die zeitliche Änderg. der Ladung in V ist durch den Strom I gegeben.

3.7.2. Energiebilanz (Poynting theorem)

Energiebilanz f. elm. Felder:

$$\mathcal{L}_{\text{freie Feld}} = \frac{\varepsilon_0}{2}|E|^2 - \frac{1}{2\mu_0}|B|^2 \longrightarrow \underbrace{\mathcal{H}_{\text{fr. Felds}} = \frac{\varepsilon_0}{2}|E|^2 + \frac{1}{2\mu}|B|^2}_{\text{vielleicht E-Dichte ?!}}$$

Bilanz für die E-Dichte $w_{el} = \frac{\varepsilon_0}{2}|E|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|B|^2$?

Start:
$$\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}}_{\cdot\vec{B}\cdot(-1)}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}}_{\cdot\vec{E}}$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

addiere

$\vec B \cdot \vec B$

$$-\vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec E) + \vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = \frac{1}{2}\,\partial_t |B|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\,\partial_t |E|^2 + \mu_0\, \vec E\cdot\vec j$$

$$-\vec\nabla\cdot(\vec E\times\vec B) = \quad - \quad " \quad -$$

$$\partial_t\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right) = -\frac{1}{\mu_0}\,\vec\nabla\cdot(\vec E\times\vec B) - \vec E\cdot\vec j$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, w_{el}(\vec r, t) = -\vec\nabla\cdot\vec S - \vec E\cdot\vec j$$

die Zeitableitung der Dichte der em. Energie

Divergenz d. Energiestroms

Verlust d. die elektromagnetische Feldenergie durch Abgabe der Energie an Ladungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(\vec r, t) = -\vec\nabla\cdot\vec j\right.$$

Analogie zur Kontinuität

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$ Energiestromdichtevektor „Poynting-Vektor"

$$w_{el} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$-\vec{j}\cdot\vec{E}$ = Verlustterm (zu interpretieren)

sehen uns an:

$A \hat{=}$ Arbeit an den Teilchen durch das elektromagn. Feld

$$A = \int dV \int^{t} dt' \underbrace{\vec{j}(\vec{r},t')\cdot\vec{E}(\vec{r},t')}_{\text{Leistungsdichte}} \xrightarrow{\hat{=}}$$

um Dichte wegzubekommen

um v. Leistung → Arbeit zu kommen

$$= \int dV \int^{t} dt' \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t')) \cdot \vec{E}(\vec{r},t')$$

$$= \sum_i q_i \int^{t} dt' \, \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t')$$

$$= \sum_i q_i \int^{t} dt' \, \frac{d\vec{r}_i}{dt'} \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t')$$

Parameterdarstellung eines Kurvenintegrals

$$= \sum_i q_i \underbrace{\int d\vec{r}_i}_{\text{Bahnkurve}} \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) = \underbrace{\underbrace{\sum_i}_{\text{alle Teilchen}} \underbrace{\int d\vec{r}_i}_{\text{Bahnkurve}} \cdot \underbrace{\vec{F}_L}_{\text{Lorentzkraft}}}_{\text{Definition der Arbeit in Mechanik}}$$

- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ beschreibt die Verlustleistungsdichte die durch Arbeit an den Punktladungen im elektromagnetischen Feld verrichtet wird

- warum taucht $\vec{B}$-Feld nicht auf?

$$\vec{F}_L = q\Big(\vec{E} + \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}}_{\text{trägt nicht zur Arbeit bei}}\Big)$$

<u>Anmerkung</u>: Es gibt auch eine Impulsbilanz f. das elektromagnetische Feld.

3.9. Weiteres Vorgehen

• es gibt homogen u. inhomogen Maxwellgl.

($\rho = j = 0$ d.h. Vakuum) ($\rho \neq 0$, $j \neq 0$) + Rand + Anfangswertproblem

Lsg. Vakuum (1)

Lsg. mit Punktladg. (2) od. komplizierter Materie (Metalle) (4)

• es gibt zeitabhängige und zeitunabhängige Probleme

$$\underbrace{(\partial_t \neq 0)}$$

wellenartige Lösungen (Erzeugg. v. Welle, Ausbreitung) (3)

$$\underbrace{(\partial_t = 0)}$$

Gleichungen d. statischen Felds (5)

4) Zeitabhängige Lösungen d. Maxwellgl. f. Vakuum + Punktladung (bewegt)

4.1. Wellen im Vakuum

Vakuum: $\rho = j = 0$, freier

welche Wellelösungen können existieren?

4.1.1. Wellengleichg. f. Vakuum

f. $\rho = 0 = \vec{j}$ folgt: $\vec\nabla \times \vec E = -\partial_t \vec B$, $\vec\nabla \times \vec B = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec E$

gekoppelte Gleichg. $\vec E \leftrightarrow \vec B$, entkoppeln:

$$\underbrace{\vec\nabla \times (\vec\nabla \times \vec E)} = -\partial_t \vec\nabla \times \vec B = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec E$$

$$\left(-\Delta + \vec\nabla \vec\nabla \cdot\right)\vec E = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec E$$

$\vec\nabla \cdot \vec E = 0$ denn $\rho = 0$

$$\leadsto \quad \Delta \vec E - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec E = 0$$

gilt für alle Komponenten E_i

<u>analog:</u> $\Delta \vec B - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec B = 0$

Ziel: ein vollständiges System von Lösungen zu finden,
um alle mögl. Lösungen danach zu entwickeln,
in kartesischen Koordinaten $\longrightarrow$ ebene Wellen
in Kugel- und Zylinderkoordinaten $\longrightarrow$ Kugelfkt / Hankelfkt.

partielle Differentialgleichung haben hohe Lösungsvielfalt im Vgl. zu gewöhnlichen Dgl.

Erinnerung an gewöhnliche: n-te Ordnung $\longrightarrow$ n unabhängige Funktionen und n-Koeffizienten

partielle Dgl.: n - Ordnung der Dgl. (höchste Anzahl der Ableitung)

p - Variable

$\longrightarrow$ Lösung setzt sich zusammen aus n unbestimmten Fkt. mit je $(p-1)$ Variablen

eindimensionale Wellengleichung als Beispiel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_x = 0 \longrightarrow n = 2,\ p = 2$$

2 unbestimmte Funktionen die von je 1 Variable abhängen:

$$E_x = f(x \pm c t)$$

$\nearrow$ beliebig, unbestimmt, kann alles sein

$\longrightarrow$ hohe Lösungsmannigfaltigkeit

→ man muß Rand- bzw. Anfangsbedingung, und eichen um f zu bestimmen,
z.B. im ∞ oder auf Kugel