

4.1.2. Ebene Wellen als Fundamentallösungen

ebene Wellen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} \right\}$ als Lsg. der Wellen gl.

Sind ein vollständiges System, um Funktionsraum auf zu spannen (jede beliebige Lsg. kann analog zu QM

nach oben Wellen entwickelt werden)

$$E_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} E_{ik} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

\uparrow Normierung \uparrow Entwicklungskoeffizient \leftarrow unabhängige Funktionen

i -te Komponente d. Felds, das Wellen gleich. erfüllen soll

jede ebene Welle f. fest \vec{k} nennt man Fundamentallösung.

und dies löst die Wellengleichung, wenn die Dispersionsrelation $\omega = c|\vec{k}|$ erfüllt ist, wird durch einsetzen in die Wellengleichung gezeigt ($\omega^2 = c^2 k^2$)

Anmerkung: man kann auch $\text{Re} \left\{ \sum_{\vec{k}} \dots \right\}$ mit $\vec{E}(\vec{r}, t)$ reell sein um \vec{B}

\vec{B} kann analog entwickelt werden

in Vektoren:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \vec{E}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

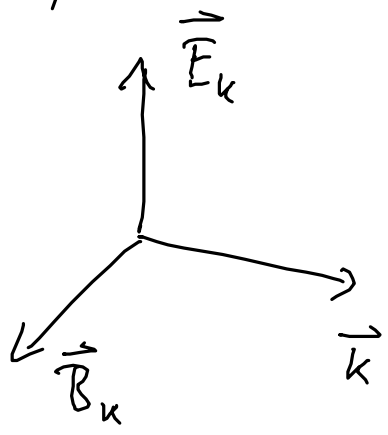
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \vec{B}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

die einzelnen Feldausdrücke. (ohne Summe)

z. B.: $\vec{F}_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ / festes k

haben nette Eigenschaften:

a) Orthogonalität von $\vec{B}_k, \vec{E}_k, \vec{k}$, weil:



$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \\ i\vec{k} \times \vec{E}_k &= i\omega \vec{B}_k & i\vec{k} \times \vec{B}_k &= -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_k \\ \vec{k} \times \vec{E}_k &= \omega \vec{B}_k & \vec{k} \times \vec{B}_k &= -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_k \end{aligned}$$

a) Offensichtlich bilden $\vec{k}, \vec{E}_k, \vec{B}_k$ ein orthog. Dreieck

b) $|\vec{B}_k| = |\vec{E}_k| / c$, weil $\omega = ck$

→ oft in Lorentzkräft f. $\frac{v_{\text{Teilch}}}{c} \ll 1$

so können dort Mag. u. Feld effektiv weggelassen

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

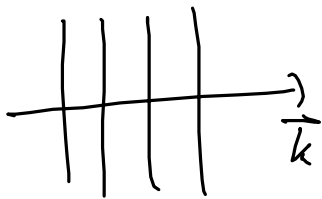
b) Phase front

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \rightarrow k_z \cdot z - \omega t = k_z \underbrace{(z - ct)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{z\text{-Richtg.}}$

Phase der Welle

wann bleibt die Phase konstant,



Flächen konstanter Phase sind Ebenen
die mit c durch den Raum laufen

Wann Ebenen?

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{konstant} \rightarrow \text{Ebene gleichung}$$

bei der \vec{k} auf der Ebene steht

c) Polarisationseigenschaften

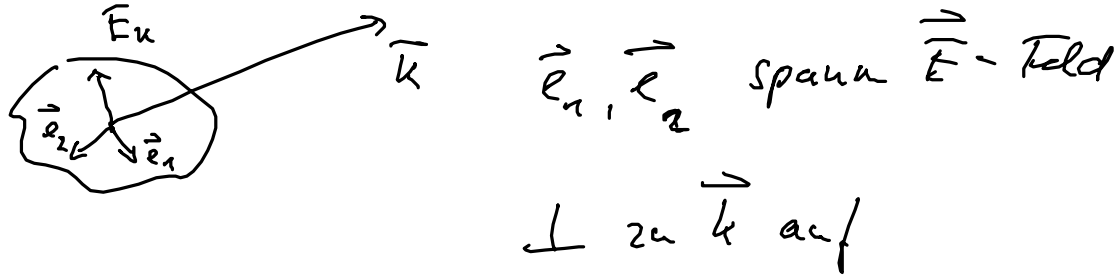
Interessiert Richtg. von \vec{E}_k für festes \vec{k}

als Funktion von Ort und Zeit,

es muß immer \perp stehen, aber in welche Richtg.

zu \vec{k} ist unklar

→ Die Richtg. nennt man Polarisation d. Lichts.



$$\vec{E}_{\vec{k}} = \left(E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

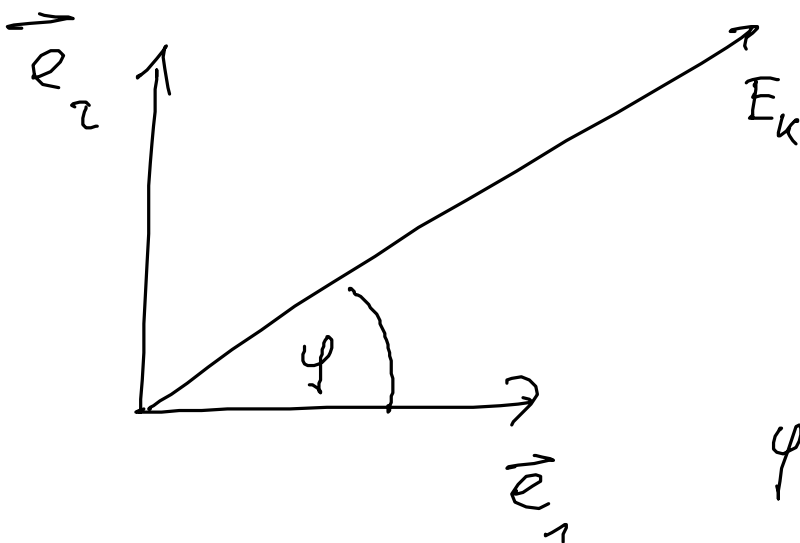
in Ebenen aufgespannt

$$= \left(|E_1| e^{i\phi_1} \vec{e}_1 + |E_2| e^{i\phi_2} \vec{e}_2 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$= \left(|E_1| \vec{e}_1 + |E_2| \vec{e}_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \right) e^{i\phi_1} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

konstant

richtete der Polarisation
 über die Phasen differenz
 $\Delta\phi$



$$\varphi = \arctan \left(\frac{|E_2| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \Delta\phi)}{|E_1| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right)$$

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$$

1. Fall: linear Polarisation

$$\Delta\phi = 0 \rightarrow \varphi = \text{zeitlich und räumlich konstant}$$

existiert ein raum und zeitfester Richtg. d. Felds \vec{E}

$\hat{=}$ Feld fester, linearer Polarisationsrichtg.

2. Fall: zirkular polarisiert

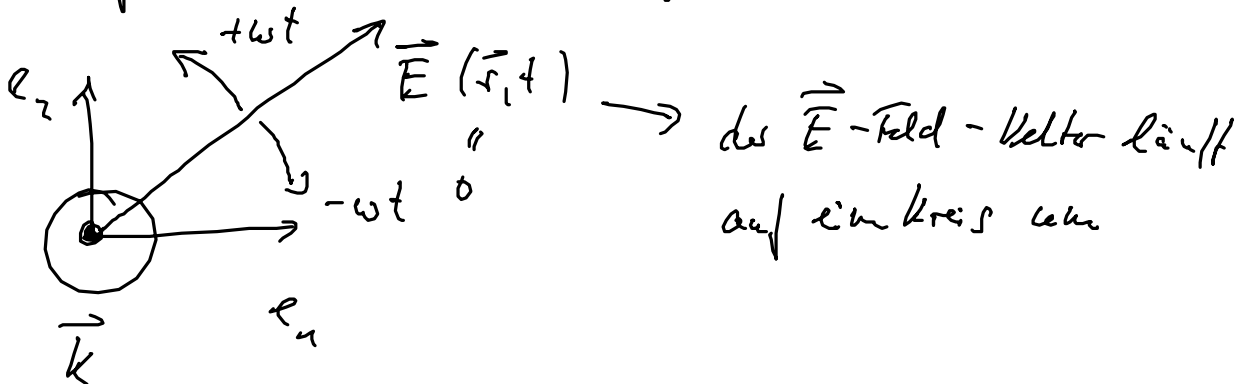
$$\Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi = \arctan \left(\frac{\cos(-\omega t \pm \frac{\pi}{2})}{\cos(-\omega t)} \right)$$

$$|E_1| = |E_2|$$

$$= \arctan \left(\frac{\pm \sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} \right)$$

$$\hat{=} \pm \omega t$$

An einem festen Ort wächst φ linear mit Zeit,
also fester Winkelgeschwindigkeit

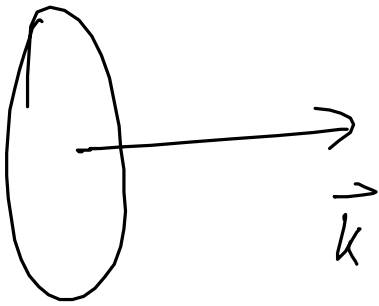


Man erhält zirkular polarisiertes Licht,

\pm bezieht sich auf Drehrichtg. im Abhid d. Well

3. Fall elliptisch polarisiertes Licht

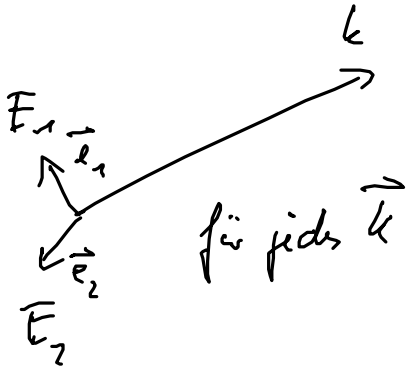
für beliebige $\Delta\phi$ findet man, daß der Lichtvektor auf einer Ellipse umläuft um β .



Zusammenfassung:

- das em. Feld kann nach ebenen Wellen zerlegt werden:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \underbrace{\vec{e}_{k\sigma}}_{\sigma=1,2} E_{k\sigma} \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}_{\text{enthält Raum-zeit Struktur}} + \text{cc.}$$



Summe über die \vec{E} -Feld Komponenten
 \perp zu den fest \vec{k}

$$\text{gültig } \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

- Polarisations-eigenschaften sind wichtige Größ. zur Charakterisierung von Feldern, um die Polarisation ein festes \vec{k} -Wert zu bestimmen muß man die Störparameter

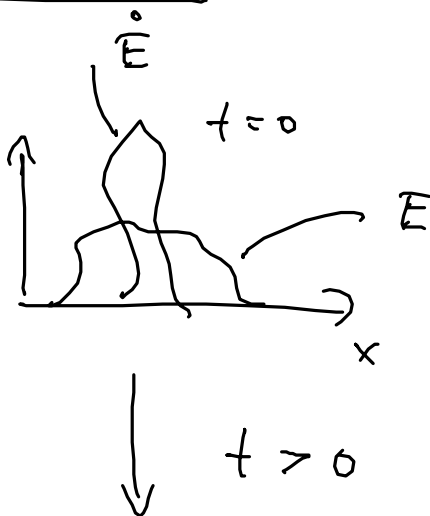
4.13. Anfangswertproblem: Lösung mit ebenen Wellen

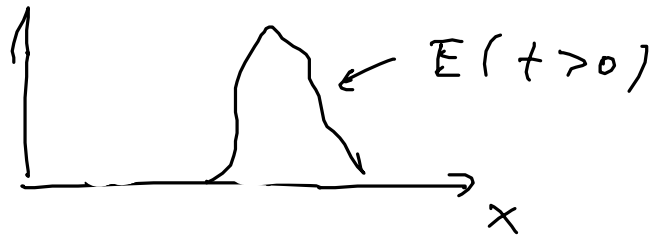
1 dimensionales Beispiel (x-Achse)

1 fester Polarisationsvektor

Anfangswertproblem: $t=0$ sei $E(x, t=0)$ bekannt

$\frac{\partial E}{\partial t}(x, t=0)$ bekannt





großes Volumen, $\sum_k \rightarrow \int dk$ (kontinuierliche
Fouriertrafo)

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \int dk E(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} + c.c.$$

Zerlegg. nach ebenen Wellen

$$E(x, 0) = \frac{1}{2} \int dk E(k) e^{ikx} + c.c.$$

$$\partial_t E(x, 0) = \frac{1}{2} \int dk E(k) (-i\omega(k)) e^{ikx} + c.c.$$

Um von $E(k)$ auszugehen, welches $E(x, t)$ bestimmt
nutzt man die letzten beiden Gleichungen und macht
den Fouriertrafo:

$$\frac{1}{2\pi} \int dx E(x, 0) e^{-ikx} = \frac{1}{2} (E(k) + E^*(-k))$$

$$\frac{1}{2\pi} \int dx \partial_t E(x, 0) e^{-ikx} = \frac{1}{2} (-i\omega(k) E(k) + i\omega(k) E^*(-k))$$

Umweltk nach $E(k) \rightarrow$

$$\bar{E}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx \left(\bar{E}(x,0) e^{-ikx} - \frac{\partial_t \bar{E}(x,0)}{i\omega(k)} e^{-ikx} \right)$$

damit ist $\bar{E}(k)$ bestimmt, und $\bar{E}(x,t)$ kann berechnet werden:

Bsp Dynamik einer lokalisierte em. Impulse

$$E(x,0) = 2\delta(x)$$



$$\dot{E}(x,0) = 0$$

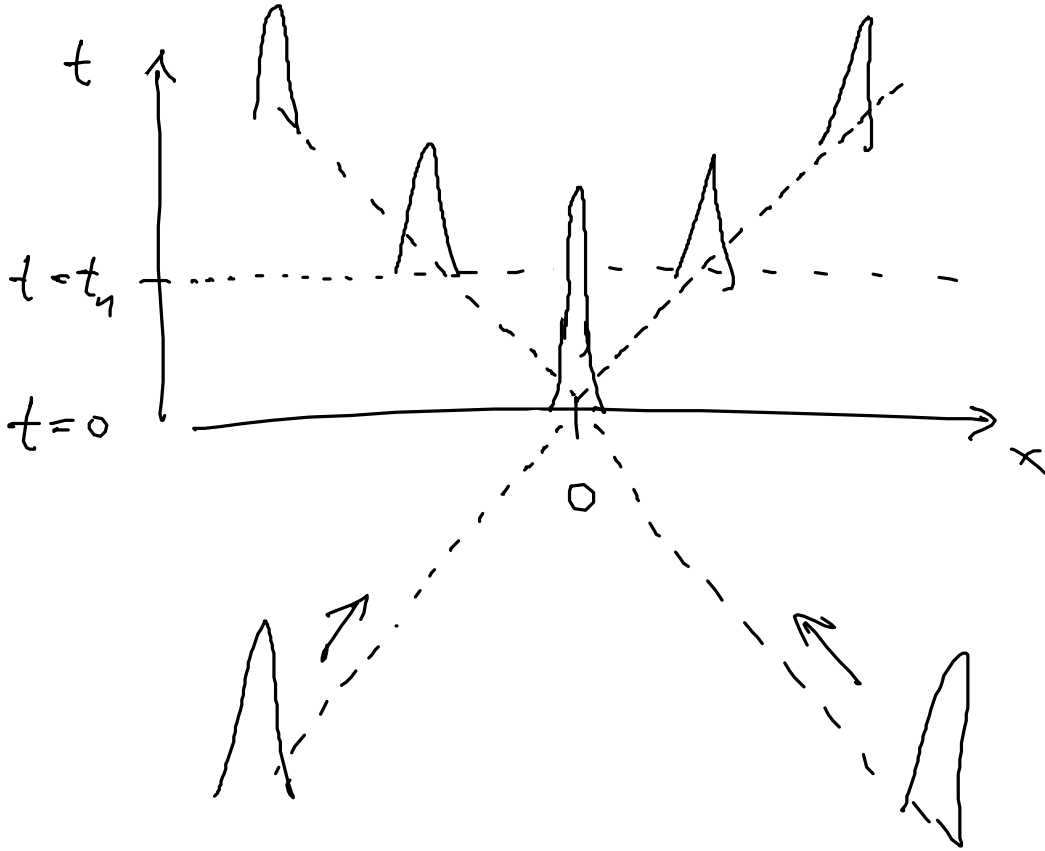
$$\bar{E}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx 2\delta(x) e^{-ikx} + 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$\bar{E}(x,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{\pi} e^{i(kx - c|k|t)} + c.c.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk e^{i(kx + c|k|t)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk e^{i(kx - c|k|t)} + c.c.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk e^{i(kx + c|k|t)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk e^{i(kx - c|k|t)}$$

$$= \delta(x + ct) + \delta(x - ct)$$



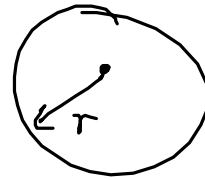
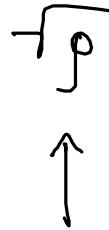
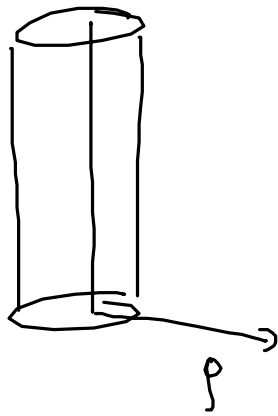
4.2. Zylinder- und Kugelwellen

Siehe ÜA,

man erhält Wellen mit Zylinder bzw. Kugelsymmetrie aus dem Laplaceoperator in Zylinder (Kugelkoordinaten)

$$E \sim \underline{e^{i(k\rho - \omega t)}}$$

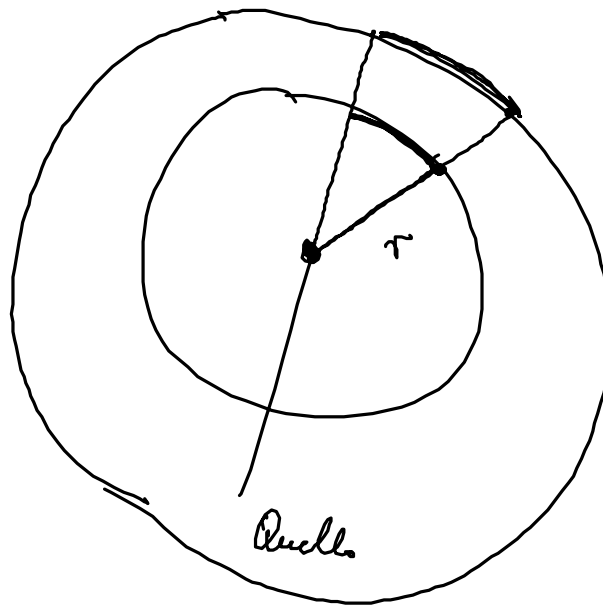
$$E \sim \underline{e^{i(kr - \omega t)}}$$



Flächen gleiche Phase
Sind Zylinder

Fläche gleiche
Phase: Kugeln

Warum gibt es die Kerne?



Die Kerne entstehen
durch die Aufteilg.
der Energie auf eine
große Fläche

ebener
4.3. Energie bei Wellen fester Polarisation

$$\vec{E} = \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\omega t - k z)} \vec{e}_x + \text{c.c.}$$

1-dimensional, feste Richtg. sei \vec{e}_x

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \frac{E_0}{c} e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e}_y + \text{c.c.}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{E_0}{c}$$

prüfe mit: $\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$

Energie des ebenen Wellen:

$$W_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Durchschnitt mit \vec{B} Zeitmittel und

Mittelwert über Oszillation der optischen Frequenz:

$$\langle \quad \rangle \stackrel{\wedge}{=} \text{Zeitmittel}$$

$$\rightarrow \langle \vec{S} \rangle, \quad \langle W_{\text{em}} \rangle$$

$$E = \hat{E}_0 e^{i\omega t} + \hat{E}_0^* e^{-i\omega t}$$

alles was außer Zeitabhängigkeit übrig bleibt

$$\langle E^2 \rangle = \langle \hat{E}_0 \hat{E}_0 e^{-i2\omega t} \rangle \rightarrow 0$$

$$+ \langle \hat{E}_0^* \hat{E}_0^* e^{-i2\omega t} \rangle \rightarrow 0$$

$$+ 2 \langle \hat{E}_0^* \hat{E}_0 \rangle$$

$$\langle \cdot \rangle \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot = \int dt \text{ (diagram of a wave with positive and negative cycles) } t$$

$$\langle W_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_0^2}{4} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{4} \frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{E_0^2}{4} \epsilon_0 \quad \text{Energiedichte eines ebenen Wellen}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{4} \frac{1}{c} \vec{e}_z = \langle W_{em} \rangle c \vec{e}_z$$

Die E-Strahldichte zeigt in z-Richtung, also die Ausbreitungsrichtung der eben Wellen und transportiert mit Lichtwindigkeit c die em. Energiedichte.