4.1.2. Ebene Wellen als Fundamentallösungen

ebene Welle $\left\{ \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)} \right\}$ als Lösg. der Wellengl.

sind ein vollständiges System, um Funktionsraum aufzuspannen (jede beliebige Lsg. kann analog zu QM nach ebenen Wellen entwickelt werden)

$$E_i(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} E_{ik}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

← unabhängige Funktionen

Normierg. Entwicklungskoeffizient

i-te Komponente d. Felds, das Wellengleichg. erfüllen soll

jede ebene Welle f. feste $\vec{k}$ nennt man Fundamentallösg.

und diese löst die Wellengleichung, wenn die Dispersionsrelation $\omega = c|\vec{k}|$ erfüllt ist, wird durch einsetzen in die Wellengleichung gezeigt $(\omega^2 = c^2 k^2)$

<u>Anmerkg.</u>: man kann auch $\mathrm{Re}\left\{ \sum_{\vec{k}} \dots \right\}$ mit dazu schreiben, da $\vec{E}(\vec{r},t)$ reell sein muss

B kann analog entwickelt werden

<u>in Vektoren</u>:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \vec{E}_k\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

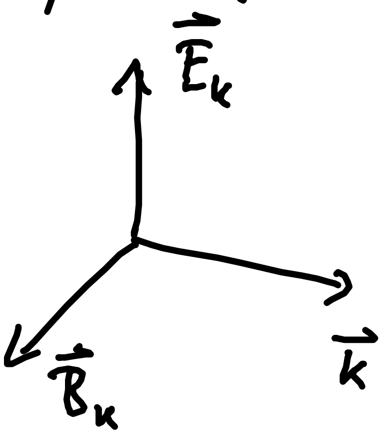
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \vec{B}_k\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

die einzelnen Fundamentallsg. (ohne Summe)

z.B.: $\vec{F}_k \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Big|_{\text{festes } k}$

habe <u>nette</u> Eigenschaften:

a) Orthogonalität von $\vec{B}_k, \vec{E}_k, \vec{k}$, <u>weil</u>:



$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$$

$$i\vec{k}\times\vec{E}_k = i\omega\vec{B}_k \quad , \quad i\vec{k}\times\vec{B}_k = -\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_k$$

$$\vec{k}\times\vec{E}_k = \omega\vec{B}_k \quad , \quad \vec{k}\times\vec{B}_k = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_k$$

a) Offensichtlich bilden $\vec{k}, \vec{E}_k, \vec{B}_k$ ein orthog. Dreibein

b) $|\vec{B}_k| = |\vec{E}_k| / c$, weil $\omega = ck$

$\rightarrow$ oft in Lorentzkraft f. $\frac{v_{\text{Teilch}}}{c} \ll 1$

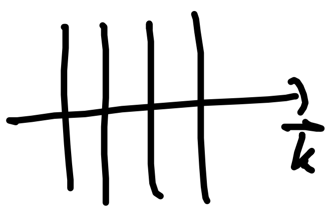
so können dort Magnetfeldeffekte weggelassen

$$F_L = q\left(\vec{E} + \vec{v}_{\text{Teilch}} \times \vec{B}\right)$$

b) Phasenfronten

$$\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t}_{\text{Phase der Welle}} \xrightarrow{z\text{-Richtg.}} k_z \cdot z - \omega t = k_z(\underbrace{z - ct}_{})$$

wann bleibt die Phase konstant,



Flächen konstanter Phase sind Ebenen die mit c durch den Raum laufen

Warum Ebenen?

$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ = konstant $\rightarrow$ Ebenengleichung

bei der $\vec{k}$ auf der Ebene steht

c) Polarisationseigenschaften

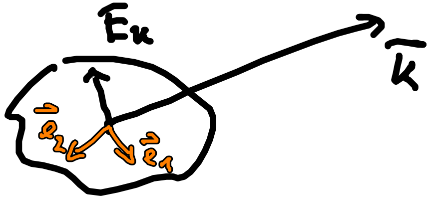
Interessiert Richtg. von $\vec{E}_k$ für festes $\vec{k}$

als Funktion von Ort und Zeit,

es muß immer $\perp$ stehen, aber in welche Richtg.

zu $\vec{k}$ ist unklar

$\rightarrow$ Die Richtung nennt man Polarisation d. Lichts.



$\vec e_1, \vec e_2$ spann $\vec E$-Feld

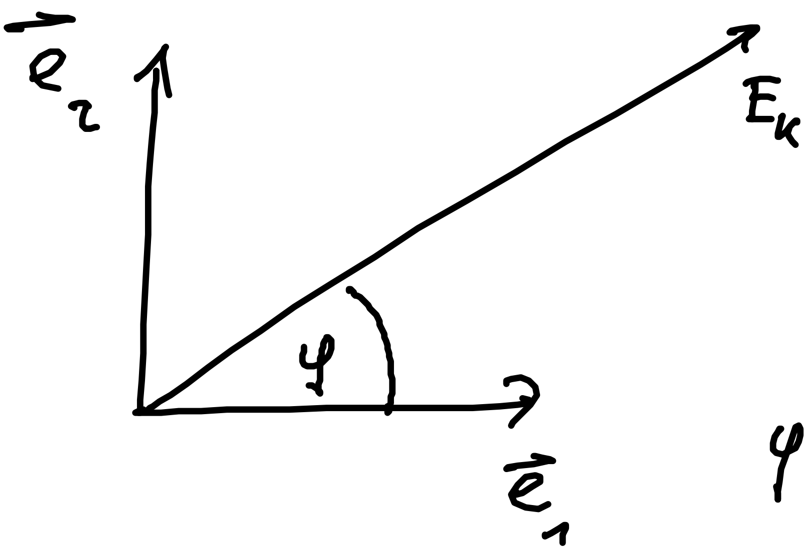
$\perp$ zu $\vec k$ auf

$$\vec E_k = \underbrace{\left(E_1 \vec e_1 + E_2 \vec e_2\right)}_{\text{in Eben aufgespannt}} e^{i(\vec k \cdot \vec r - \omega t)}$$

$$= \left(|E_1| e^{i\phi_1} \vec e_1 + |E_2| e^{i\phi_2} \vec e_2\right) e^{i(\vec k \cdot \vec r - \omega t)}$$

$$= \left(|E_1| \vec e_1 + |E_2| \vec e_2 \, e^{\underbrace{i(\phi_2 - \phi_1)}}\right) \cancel{e^{i\phi_1}} \underbrace{e^{i(\vec k \vec r - \omega t)}}_{\text{Konstant}}$$

Einstelle der Polarisation über die Phasendifferenz $\Delta\phi$



$$\varphi = \arctan\left(\frac{|E_2| \cos(\vec k \vec r - \omega t + \Delta\phi)}{|E_1| \cos(\vec k \vec r - \omega t)}\right)$$

$$\varphi = \varphi(t, \vec r)$$

1. Fall: linear Polarisation

$\Delta\phi = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi =$ zeitlich und räumlich konstant

existiert ein raum und zeitfeste Richtg. d. Felds $\vec{E}$

$\hat{=}$ Feld fester, linearer Polarisationsrichtg.

2. Fall: zirkular polarisiert

fester Ort, z.B $\vec{r} = 0$

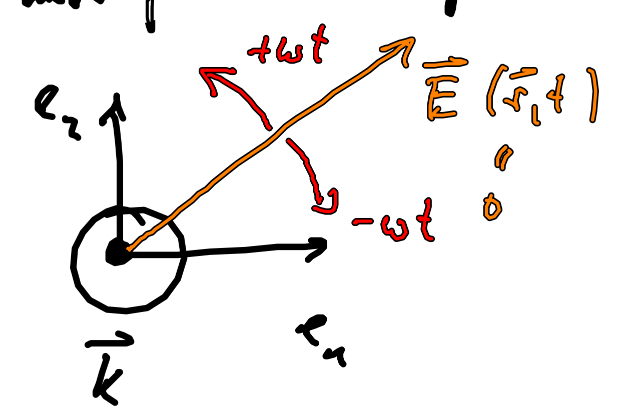
$$\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2} \longrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{\cos(-\omega t \pm \frac{\pi}{2})}{\cos(-\omega t)}\right)$$

$|E_1| = |E_2|$

$$= \arctan\left(\frac{\pm\sin(\omega t)}{\cos(\omega)}\right)$$

$$= \pm\,\omega t$$

An ein festen Ort wächst φ linear mit Zeit, also feste Winkelgeschwindigkeit



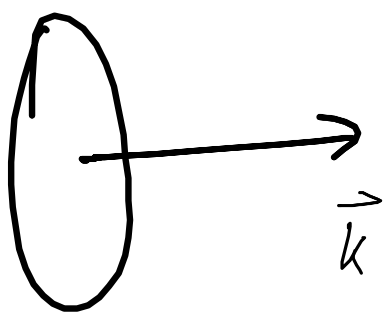
$\longrightarrow$ der $\vec{E}$-Feld-Vektor läuft auf ein Kreis um

Man erhält zirkular polarisiertes Licht,

$\pm$ bezieht sich auf Drehrichtg. im Anblick d. Welle

3. Fall elliptisch polarisiertes Licht

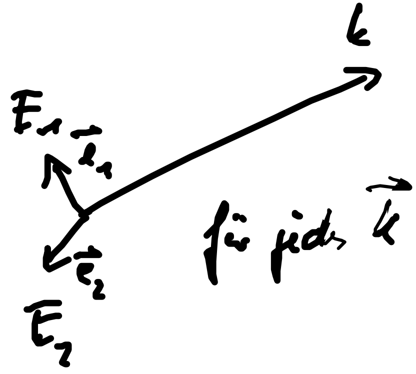
für beliebige $\Delta\phi$ findet man, daß der Lichtvektor auf einer Ellipse umläuft um β.



Zusammenfassg.:

- das em. Feld kann nach eben Wellen zerlegt werden:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{\substack{\vec{k},\sigma \\ \sigma = 1,2}} \underbrace{\vec{e}_{k\sigma} E_{k\sigma}}_{} \; \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}_{\text{enthält Raum-Zeit Struktur}} + c.c.$$



Summe über die $\vec E$-Feld Komponent
$\perp$ zu dem fest $\vec k$

günstig $\vec e_{k\sigma} \cdot \vec e_{k\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$

– Polarisationseigenschaften sind wichtige Größ.
zur Charakterisierg. von Feldern,
um die Polarisation eines festen $\vec k$-Werts zu
bestimmen mißt man die Stokesparameter

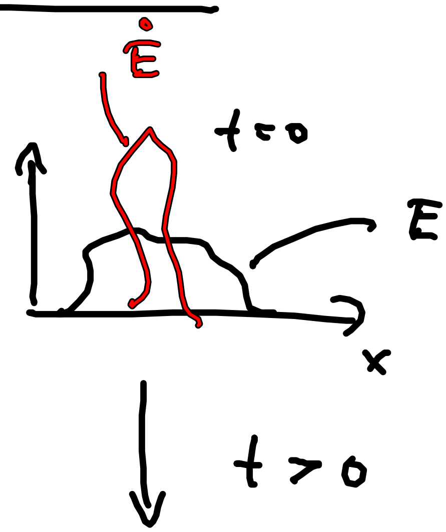
4.13. Anfangswertproblem: Lösg. mit ebenen Wellen

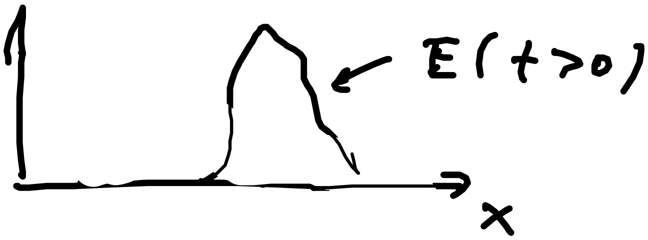
1 dimensionales Beispiel (x-Achse)

1 fester Polarisationsvektor

<u>Anfangswertproblem</u>: $t=0$ sei $E(x, t=0)$ bekannt

$\partial_t E(x, t=0)$ bekannt





große Volumen, $\sum_k \to \int dk$ (kontinuierliche Fouriertrafo)

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\int dk\, E(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} + c.c.$$

Zerlegg. nach ebenen Wellen

$$E(x,0) = \frac{1}{2}\int dk\, E(k)\, e^{ikx} + c.c.$$

$$\partial_t E(x,0) = \frac{1}{2}\int dk\, E(k)\,(-i\omega(k))\, e^{ikx} + c.c.$$

um va $E(k)$ auszurechnen, welches $E(\vec{x},t)$ bestimmt nutzt man die letzt beiden Gleichungen und macht deren Fouriertrafo:

$$\frac{1}{2\pi}\int dx\, E(x,0)\, e^{-ikx} = \frac{1}{2}\left(E(k) + E^*(-k)\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int dx\, \partial_t E(x,0)\, e^{-ikx} = \frac{1}{2}\left(-i\omega(k)E(k) + i\omega(k)E^*(-k)\right)$$

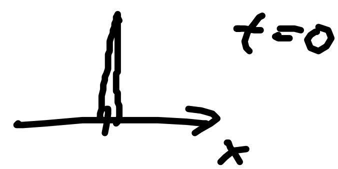
umstelle nach $E(k) \longrightarrow$

$$E(k) = \frac{1}{2\pi}\int dx \left(E(x,0)\, e^{-ikx} - \frac{\partial_t E(x,0)}{i\omega(k)}\, e^{-ikx}\right)$$

damit ist $E(k)$ bestimmt, und $E(x,t)$ kann berechnet werden:

<u>Bsp</u> Dynamik eines lokalisierten Impulses

$$E(x,0) = 2\,\delta(x)$$



$$\dot{E}(x,0) = 0$$

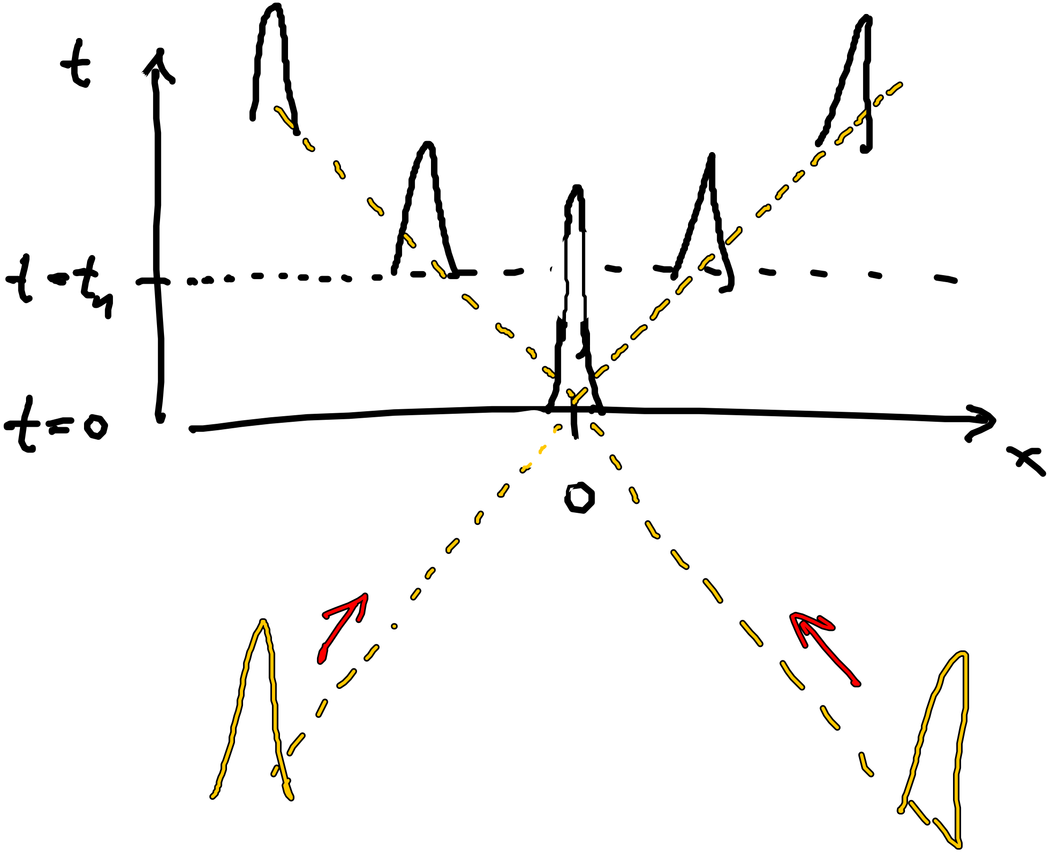
$$E(k) = \frac{1}{2\pi}\int dx\; 2\,\delta(x)\, e^{-ikx} + 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{1}{\pi}\, e^{i(kx - c|k|t)} + \text{c.c.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} dk\, e^{i(kx + ckt)} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} dk\, e^{i(kx - ckt)} + \text{c.c.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{i(kx + ckt)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{i(kx - ckt)}$$

$$= \delta(x + ct) + \delta(x - ct)$$



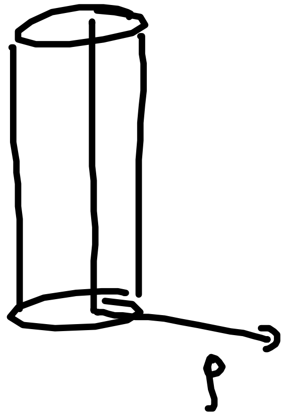
4.2. Zylinder- und Kugelwelle

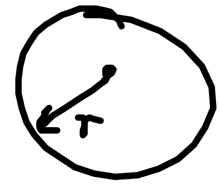
siehe ÜA,

man erhält Wellen mit Zylinder bzw Kugelsymmetrie aus dem Laplaceoperator in Zylinder/Kugelkoordinaten

$$E \sim \frac{e^{i(k\rho-\omega t)}}{} \qquad E \sim \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{}$$

$\sqrt{\rho}$ $\sqrt{r}$

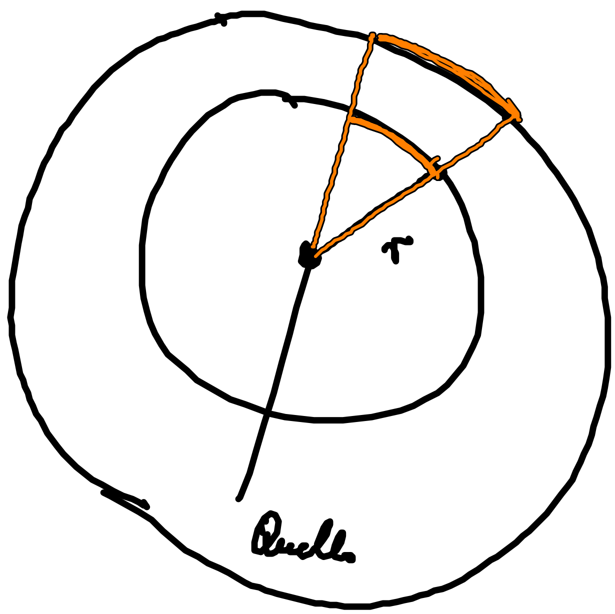




Flächen gleicher Phase sind Zylinder

Flächen gleicher Phase: Kugeln

Warum gibt es die Nenner?



Die Nenner entstehen durch die Aufteilg. der Energie auf eine größere Fläche

4.3. Energie bei ebener Welle fester Polarisation

$$\vec{E} = \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e}_x + \text{c.c.}$$

1dimensional, feste Richtg. sei $\vec{e}_x$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\frac{E_0}{c} e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e}_y + c.c.$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

prüfen mit: $\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$

Energie der ebenen Welle:

$$w_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Detektor misst Zeitmittel und

mittelt über Oszillation der optischen Frequenz:

$\langle \quad \rangle \mathrel{\hat{=}}$ Zeitmittel

$\rightarrow \quad \langle \vec{S} \rangle, \quad \langle w_{em} \rangle$

$$E = \hat{E}_0 e^{i\omega t} + \hat{E}_0^* e^{-i\omega t}$$

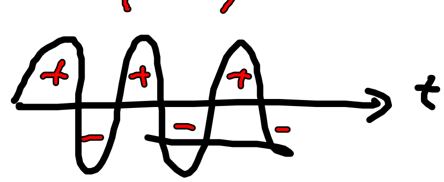
alles was außer Zeitabhängigkeit übrig bleibt

$$\langle E^2 \rangle = \langle \hat{E}_0 \hat{E}_0 e^{-i2\omega t} \rangle \to 0$$

$$+ \langle \hat{E}_0^* \hat{E}_0^* e^{-i2\omega t} \rangle \to 0$$

$$+ 2 \langle \hat{E}_0^* \hat{E}_0 \rangle$$

$$\langle \cdot \rangle \to \int_{t_1}^{t_2} dt \, \cdot = \int dt$$



$$\langle w_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{E_0^2}{4} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{4} \frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{E_0^2}{4} \varepsilon_0$$ Energiedichte einer ebenen Welle

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{4} \frac{1}{c} \vec{e}_z = \langle w_{em} \rangle c \, \vec{e}_z$$

Die E-Stromdichte zeigt in z-Richtg., also der Ausbreitungs-richtg. der eben Welle und transportiert mit Geschwindigkeit c die em. Energiedichte.