4.4. Anwesenheit von Ladungen

geben Ladungs- und Stromdichte vor und versuchen

$\rho \neq 0 \neq \vec{j}$

die inhomogene Lösung der Maxwellgl. zu finden

allgemeinen Lösung:

allg. homogene Lsg. + inhomogene Lsg. ($\rho \neq 0 \neq j$)

Randbedingg. + Anfangsbedingg.

man verwendet das skalar / Vektorpotential

Def der Felder über die Potentiale

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \, , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$

→ alles auf Potentiale verschoben.

die Gleichg. f. die Potentiale kamen aus $\mathcal{L}$-Gleichungen, siehe 2. Vorlesung:

$$\nabla^2 \phi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{Gleichg. für } \phi$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi\right) = -\mu_0 \vec{j}$$

Gleichg. f. A-Feld

Idee: $\rho, \vec{j}$ als gegeben annehmen

$\vec{A}, \phi$-Gleichg. lösen → $\vec{E}, \vec{B}$ $(\vec{A}, \phi)$

$\vec{E}, \vec{B} \; (\rho, \vec{j})$

die Potentialgleichg. sind kompliziert und man verwendet die Eichfreiheit (χ-Funktion) um diese Gleichg. zu vereinfachen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \\ \phi &\to \phi' = \phi - \partial_t \chi \end{aligned}}$$

Eichfreiheit, χ kann beliebig gewählt werden

mit Hilfe v. χ kann man die Potentialgleichg. entkoppeln: Gleichg f. ϕ, $\vec{A}$ in sich „allein".

Zwichtige Eichg. sind

Lorenzeichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = 0$

Coulombeichg: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

3 wichtige Pkt wovon das geht:

1) die Felder dürfen sich nicht ändern, wenn die Potentiale $A \to A'$, $\phi \to \phi'$ geändert werden

$$\vec{E}' = -\partial_t \vec{A}' - \vec{\nabla}\phi' = -\partial_t \vec{A} - \cancel{\partial_t \vec{\nabla}\chi} - \vec{\nabla}\phi + \cancel{\vec{\nabla}\partial_t \chi}$$

$$\rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$$

analog $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} = 0$ für $\vec{B}' = \vec{B}$

Die Felder ändern sich durch eine Eichtransformation nicht! $\Rightarrow$ die Potentiale können verändert werden, es ist egal ob man mit $\vec{A}$ bzw $\vec{A}'$, ϕ bzw ϕ' arbeitet. Hoffng. ϕ' erfüllt eine einfachere Gleichg!

2) die Potentialgleichungen werden „formal" mathematisch für $\vec{A}, \phi$ genauso wie f. $\vec{A}', \phi'$ aussehen, aber man kann durch die Wahl v. χ, die angegeben Lorenz / Coulombeichg. machen und einfachere Pot.gl. bekommen:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' \\ \phi \rightarrow \phi' \end{array}\right\}$$

an Bsp. für ϕ:

$$\nabla^2\phi + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\phi' + \cancel{\nabla^2\partial_t\chi} + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' - \cancel{\partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\chi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Formel gelten auch dieselben Potentialgleichg.,
aber jetzt können zusätzlich Beding. gefordert werden
um die Gleichg. für „ ' " einfacher zu machen indem
χ ganz konkret gewählt wird

4.4. 1. Lorenzeichung

bei $\vec{A} \to \vec{A}'$, $\phi \to \phi'$ soll gelten:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi' = 0}$$

dies macht die Gleichg. sehr einfach:

$$\boxed{\nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}}$$

Potentialgleichg. in Lorenzgleichg.
sind Wellengleichungen mit Inhomogenität $\rho, \vec{j}$.

Begründung f. Lorenzeichg. über Wahl d. Funktion χ:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \chi \qquad | \text{ Trafo, } \vec{\nabla} \cdot$$

$$\partial_t \phi' = \partial_t \phi - \partial_t^2 \chi \qquad | \text{ Trafo } \vec{\nabla}$$

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi' = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \Delta\chi + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi = 0}_{\text{Bestimmungsgl. f. } \chi}$$

Fordg. in Lorenzeichg.

$$\rightarrow \Delta\chi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi = \underline{\underline{-\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\phi}}$$

bekannt

χ ist damit konstruiert $\rightarrow$ Lorenzeichg.

Vorteile der Lorenzeichung

- symmetrische Formulierg. (dieselben Gleichg. f. $\vec{A}', \phi'$)

$\rightarrow$ einfache relativistische Schreibweise

$\rightarrow$ symmetrische Behandlung bei Näherungen

4.4.2 Coulombeichg.

wähle: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$ Coulombeichung

$\vec{A}'$ wird also quellfrei gewählt, Quelldichte $= 0$

wie muß man χ wählen, konstruiere:

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\chi = 0$$

Fordg., welches χ erfüllt das?

χ ist die Lösg. der Poissongleichg.

$$\Delta\chi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

wie sehen die neuen Potentialgl. aus?

$$\nabla^2\phi' = -\rho/\varepsilon_0 \,, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{\nabla}\phi'$$

diese Gleichg. sind noch verkoppelt, will man nicht

wie kriegt man ϕ' los?

man setzt die Lsg. für ϕ' ein und schreibt die rechte Seite kompakt:

$$\phi'(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \text{(Vorgriff)}$$

$$\nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \,\frac{\partial_t \rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$$

Kontinuitätsgl.

$$= -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r' \,\frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

partielle Integr.

$\vec{r} \to \vec{r}\,'$

$$= -\mu_0\int d^3r' \,\vec{j}(\vec{r}\,',t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \,\frac{\vec{\nabla}'\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{(Mathe)}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \,\big(\underbrace{-\nabla'^2 + \vec{\nabla}'\,\vec{\nabla}'\cdot}_{\vec{\nabla}'\times\vec{\nabla}'\times}\big)\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{j}_T(\vec{r},t)$$

$$\nabla^2\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}' = -\mu_0\, j_T$$

im Vergleich zur Lorenz eichg. steht hier der transversale Strom !

insgesamt f. Coulombeichg.:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}_T \\ &\Delta \phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}}$$

<u>Vorteil der Coulombeichg.</u>

→ unsymmetrische Formulierung

oft, z.B. Festkörpertheorie ist im Mittel gemittelt

$$\langle \rho \rangle \neq 0 \quad , \quad \langle j \rangle = 0$$

$\uparrow$ Mittelwert

und dann $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ einfacher als die Wellengleichung

<u>Quantenoptik:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\phi \to \text{Kernpotential} \\ &\vec{A} \to \text{Lichtfeld} \end{aligned}\right\} \text{unsymmetrische Formulierg. auch günstig}$$

$\Longrightarrow$ immer problemangepaßte Anwendung v. Eichungen

4.5. Lösung der Potentialgleichungen

zunächst betracht wir die allgemeinste Gleichg. die auftritt f. 1 Vektorkomponente

$$\underbrace{\Box \psi}_{(A_i,\, \phi)} = \underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)}_{\Box \,\hat{=}\, \text{Wellenoperator}} \psi = -4\pi \underbrace{f(\vec{r}, t)}_{\text{allgemeine Inhomogenität}}$$

Lösg. der Poissongleichg $c \to \infty$

$\rightarrow$ löse diese allg. Gleichung

4.5.1 Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion

löse zunächst

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r}, \vec{r}\,', t, t') = -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\,\delta(t - t')$$

wenn G gefunden $\rightarrow$ Lösg. ψ

$$\Psi(\vec r,t) = \int d^3r' \int dt' \underbrace{G(\vec r,\vec r\,',t,t')}_{\text{leichter zu bestimmen}} f(\vec r\,',t')$$

→ Ψ als Faltg. dargestellt über G

das ist zu zeigen:

$$\underline{\underline{\Box\Psi}} = \int d^3r' \int dt' \underbrace{\Box_{r,t}\, G(\vec r,\vec r\,',t,t')}_{-4\pi\,\delta(\vec r-\vec r\,')\,\delta(t-t')\ \text{laut Definition}} f(\vec r\,',t') = \underline{\underline{-4\pi f}}$$

wirkt auf $\vec r,t$

wenn G bekannt → kann Ψ berechnet werden.

Was können wir noch über G sagen?

- weil keine spezielle Zeit / kein spezieller Ort in der Gl. f. G ausgezeichnet ist, kann G nur von $|\vec r-\vec r\,'|$, $t-t'$ abhängen

kein Richtg. ausgezeichnet

$$\rightarrow\ G = G(\,|\vec r-\vec r\,'|,\ t-t'\,)$$

- G-Interpretation:

Gibt ein Feld (Wellengleichg.) das durch eine kurz zu Zeitpkt t' auftauchende Punktladg. am Ort $\vec{r}'$ aufgeprägt wird ($\delta \hat{=}$ kurz)

- Lösungen sind: $G^{\pm} = \dfrac{\delta\left(\Delta t \mp \frac{r}{c}\right)}{r}$ (Vorgriff)

$$\Delta t = t - t', \quad r = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

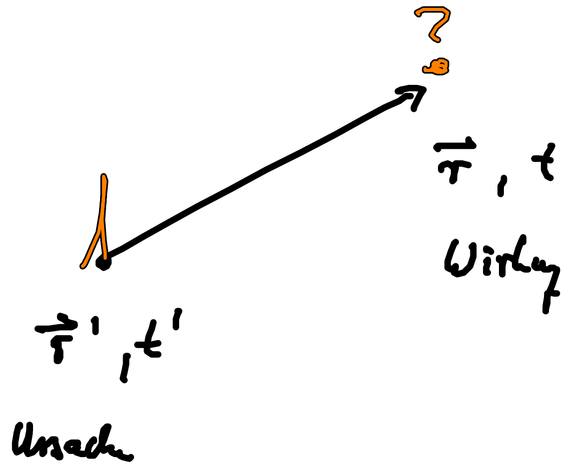
- Was sagen uns diese Lösungen?

$$G^{\pm} \sim \delta\left(t' - \left(t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right)$$

- wir beobachten Effekt am Ort $\vec{r}$, zur Zeit t ausgelöst durch Pkt-Ladg. am Ort $\vec{r}'$ zur Zeit t'
- für Erfüllg. der δ-Fkt sollte Argument Null werden:

$$t' = t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

<u>unteres Vorzeichen</u>: $t > t'$



Ursache kommt vor Wirkung, Laufzeit $\Delta t \simeq \frac{\Delta r}{c}$

„retardierte G-Fkt"
(Wirkg. verzögert)

<u>aber Vorsicht</u>:

$t < t'$, Wirkg. kommt vor der Ursache

„avancierte G-Funktion" $\longrightarrow$ physikalisch i.a. nicht sinnvoll