$$G^+ = \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) \Big/ |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

einsetzen in

$$\Psi(r,t) = \int dt' \int d^3r'\, G^+(t,t',\vec{r},\vec{r}\,')\, f(\vec{r}\,',t')$$

Lösung der inhomogenen Wellengleichung:

$$\Psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \frac{f\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

- damit ist jede beliebige Wellengleichung gelöst
- beachte des retardierten Zeitarguments; Retardierung: die Zeit $\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$, die wenn bei $\vec{r}\,'$ etwas (Ursache) passiert die Wirkung bis zu $\vec{r}$ braucht

4.5.2 Die Lösung der Potentialgleichungen

Lorenzeichung:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Coulombeichung:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

($c \to \infty$ an Lorenzeichung)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

wenn man $\vec{j}, \rho$ vorgegeben hat kann man in der Eichg. seiner Wahl die Potentiale berechnen und damit dann die Felder:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$

4.5.3. Berechnung der Greenschen Funktion

muß noch nachgetragen werden :

$$\Box\, G(\vec{r}, \vec{r}\,', t, t') = -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \delta(t - t')$$

Definitionsgleichung, wollen G berechnen

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G = -4\pi\, \delta(\vec{r})\, \delta(t)$$

$\vec{r}\,', t' = 0$

$\longrightarrow$ oBdA,

z.B aus physikalischen Gründen kann nur Differenz auftauchen oder: Variablentrafo $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{r}\,'$, $t \to t + t'$

Fourierraum : später Rücktransformation

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3q \int d\omega \, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega t)} \, \underline{G(\vec{q},\omega)}$$

4 Variable wegen $\vec{q}$, ω

Fouriertransformierte

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \, , \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \, e^{-i\omega t}$$

x, y, z (3 Variable, also $\frac{1}{(2\pi)^3}$)

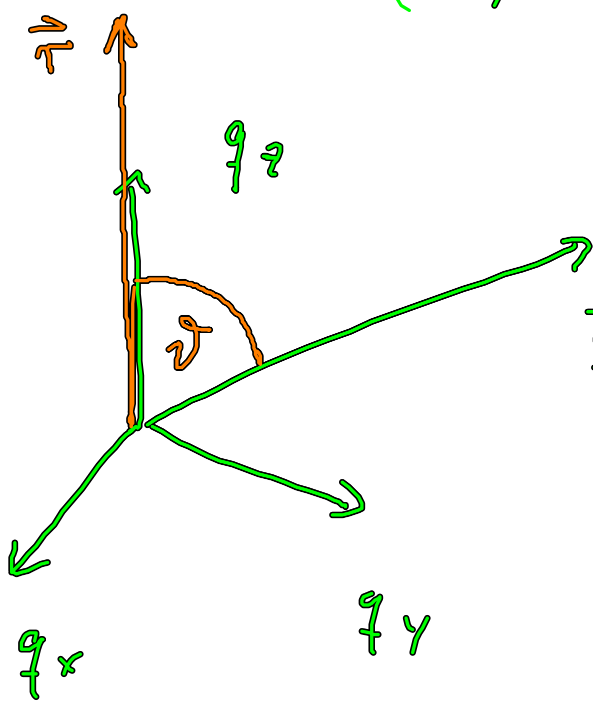
Lösung im Fourierraum:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\left(-q^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) G(q,\omega) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4} \cdot 1$$

$$G(q,\omega) = -\frac{4\pi}{-q^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Rücktransformation:

$$G(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int d^3q \int d\omega \, \frac{e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega t)}}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}$$



über den gesamten q-Raum geht das Integral

$$G(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^{\infty} dq\, q^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \, \frac{e^{iqr\cos\vartheta}}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \, e^{iqr\cos\vartheta} = \int_{-1}^{1} dx \, e^{iqrx} = \frac{2}{qr}\sin qr$$

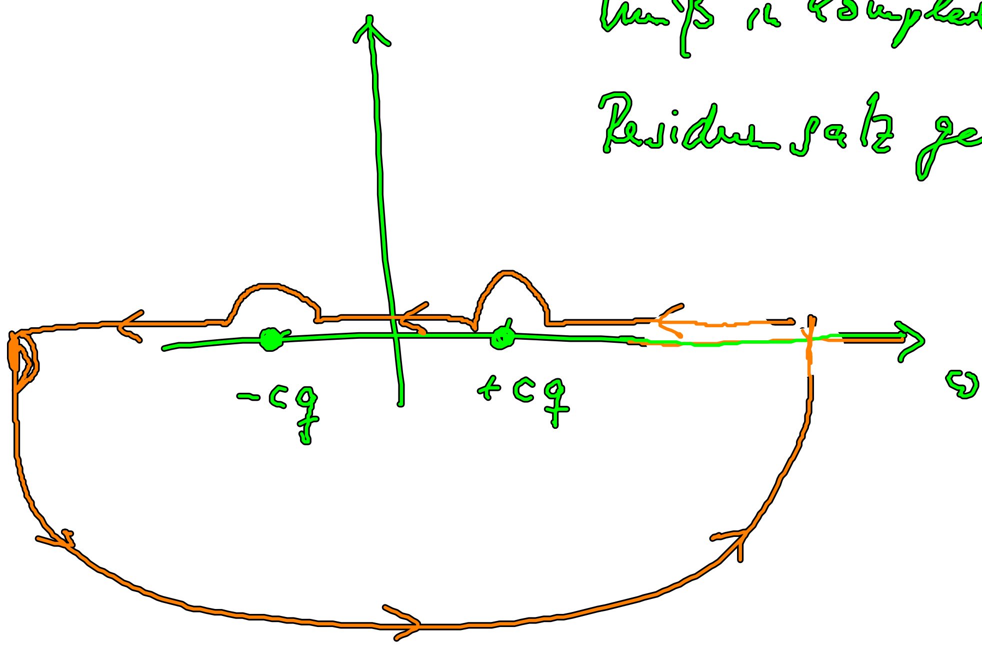
$x = \cos\vartheta \longrightarrow dx = -\sin\vartheta \, d\vartheta$, $\theta = 0 \to x = 1$

$\theta = \pi \to x = -1$

$$= -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq\, q\, \frac{\sin qr}{r}\, 4\pi \int d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 q^2}$$

$$= -\frac{c^2}{\pi^2 r} \int_0^\infty dq\, q \sin(qr) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 q^2}$$

muß in komplexer Ebene über Residuensatz gelöst werden



$$\int d\omega \, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 q^2} = -\frac{2\pi}{cq} \sin(cqt)$$

das Verfahren, den Weg nach unten zu schließen, geht nur für $t > 0$ (Verschwinden des Integranden für $\omega \to -i\infty$)

$t < 0 \;\hat{=}\;$ schließen nach oben $\to$ avancierte Lösg.

$$G^{+}(\vec{r}, t) = \frac{2c}{\pi} \underbrace{\int_0^\infty dq \, \sin(qr) \sin(cqt)}_{*}$$

retardiertes G

$$* = \int_0^\infty dq \, \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2i} \sin(cqt)$$

$q \to -q$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^\infty dq \, e^{iqr} \sin cqt + \int_{-\infty}^0 dq \, e^{iqr} \sin cqt \right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} dq \left(e^{iq(r+ct)} - e^{iq(r-ct)}\right)\frac{1}{2i}$$

$$= -\frac{1}{4}\, 2\pi \left(\cancel{\delta(r+ct)} - \delta(r-ct)\right)$$

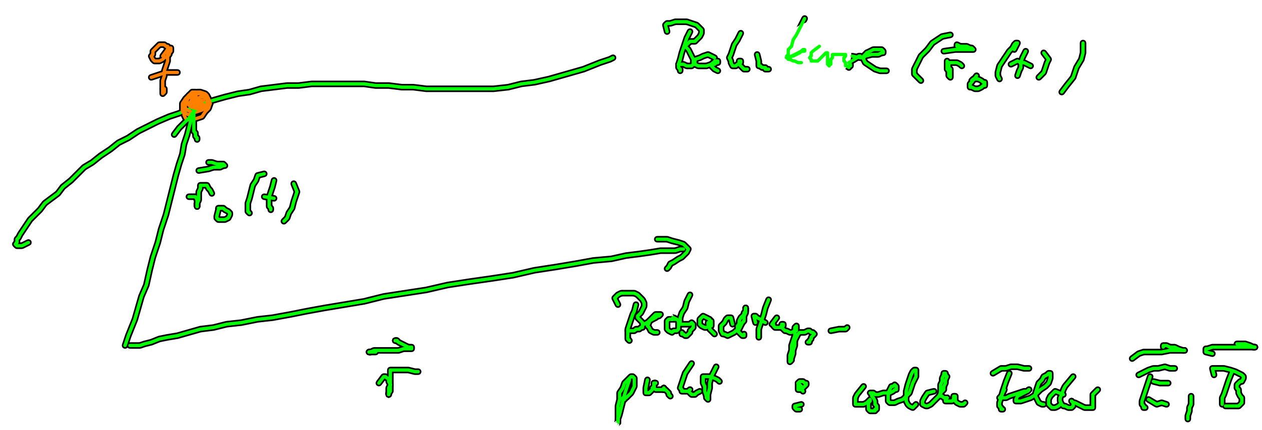
$t > 0$
wird nicht erfüllt

insgesamt $\quad G^{+}(\vec r, t) = \frac{c}{r}\,\delta(r-ct) = \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$

$\left(\vec r \to \vec r - \vec r\,' \Longrightarrow \text{Ergebnis v. oben}\right)$

5 Felder von ruhenden und bewegten Punktladungen

5.1. Potentiale und Felder einer Punktladung



liegen bei $\vec{r}$ zur Zeit t vor?

$$\rho = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

$$\vec{j} = q\,\dot{\vec{r}}_0\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

$\vec{r}_0(t)$ sei bekannt, z.B. Beschleuniger + Abstrahlung, FEL

<u>Lorenzeichung</u>

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}',t')\,\delta\!\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int d^3r'\,\frac{q\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t'))\,\delta\!\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\,\frac{\delta\!\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Das Zeitintegral ist schwierig!

$$\int dx\, \underline{g(x)}\, \delta(f(x)-y) = \left.\frac{g(x)}{df/dx}\right|_{y=f(x)}$$

$$\phi(\vec r, t) = \underbrace{\underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(t')|}} \cdot \left(1 - \frac{\vec r - \vec r_0}{|\vec r - \vec r_0|}\frac{\dot{\vec r}_0(t')}{c}\right)^{-1}}$$

$$t = t' + \frac{|\vec r - \vec r_0(t')|}{c} \Rightarrow t' = t'(\vec r, t)$$

$$y = t,\ x = t',\ f(x) = t' + |\vec r - \vec r_0|/c$$

<u>Achtg.</u>! die Zeit t' ist so zu verstehen,

daß $\quad t' = t - \dfrac{|\vec r - \vec r_0(t')|}{c}$ und nach

t' umgestellt worden (ist im Moment implizit)

$$\rightarrow t' = t'(\vec r, t) \Rightarrow \phi(\vec r, t)$$

Das ist wieder das Problem der retardierten Zeit t';

welche durch Lichtgeschwindigkeit (endlich) ist hervorgerufen wird.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')| - (\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')| - (\vec{r}-\vec{r}_0(t'))\cdot\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}}$$

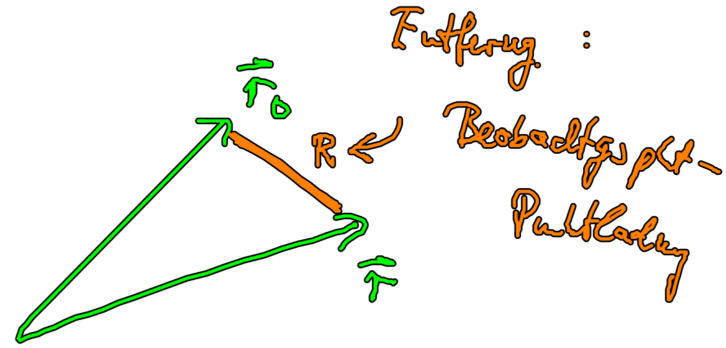
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(\vec{e}_R-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)} - \frac{\vec{e}_r\times[(\vec{e}_R-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)^3}\right)$$

$$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_0, \quad \vec{e}_R = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}, \quad \vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0}{c}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{e}_R\times\vec{E}}{c}$$

Bemerkungen zur $\vec{E}$-Formel

1) man erkennt 2 verschiedene Ortsabhängigkeiten im E-Feld



1. Term : $\frac{1}{R^2}$

Nahfeldterm

2. Term $\frac{1}{R}$

Fernfeldterm

2) Erinnerung an Kugelwelle:

Strahlung hat eine Abhängigkeit der Felder von $\frac{1}{R}$,

denn $S, w_{em} \sim \frac{1}{R^2}$, kann auf Oberflächenelement

$\int d\Omega \, R^2$ aufgeteilt werden, so daß man über die

$\uparrow$
(ϑ, φ)

Oberfläche (ϑ, φ) zu jedem R dieselbe Energie findet

$\longrightarrow$ Strahlungsterm / E-Transport

Dagegen wird $\frac{1}{R^2}$ im E-Feld in S, w_{em} mit

$\frac{1}{R^4}$ gewichtet und seine Energie „verbleibt im Nahfeld"

1. Term ist kein Strahlungsterm

3) $(1-\beta^2)$, $(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)$ enthalten $\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\dot{\vec{r}}_0}{c}$,

d.h. beide Terme enthalten relativistische Effekte!

4) Strahlg. bzw. Fernfeldeffekte sind nur

existent wenn $\dot{\vec{\beta}} \neq 0$ $\dot{\vec{\beta}} \hat{=} \ddot{\vec{r}}_0$

Man benötigt beschleunigte Ladungen um Strahlung zu erzeugen.

5) alle Grenzfälle in $\vec{E}$, $\vec{B}$ enthalten:

- ruhende Ladung $\vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} = 0$
- gleichförmig bewegt $\dot{\vec{\beta}} = 0$

- nichtrelativistische Bewegung: $\beta \ll 1$

- allgemeiner Fall