Feld eines bewegten Punktladung:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1-\beta^2)}{R^2(1-\vec{\beta}\vec{e}_R)^3} + \frac{\vec{e}_R \times (\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}}{cR\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)}\right)_{t'=t'(\vec{r},t)}$$

zu kompliziert → versuchen einfach Grenzfälle

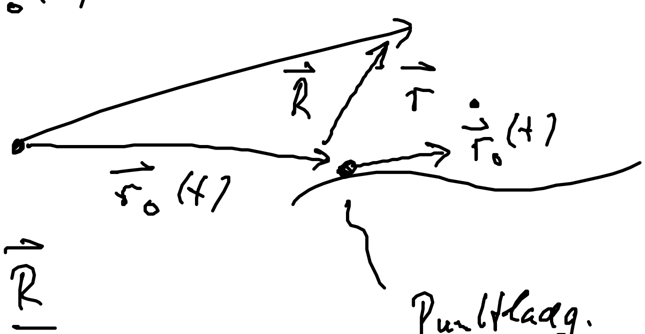
zu rekonstruieren

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$

$R = |\vec{R}|$

$E(\vec{r},t) = ?$

$\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c}$, $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c}$



$\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{R}$

Grenzfälle: $\vec{\beta} = 0$ ⇒ ruhende Punktladung

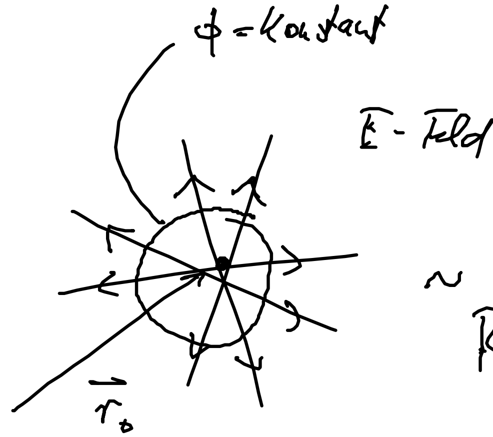
$\dot{\vec{\beta}} = 0$, $\vec{\beta}$ = Konstante ⇒ gleichförmig bewegte PL

$\dot{\vec{\beta}} \neq 0$ ⇒ beschleunigte Punktladung

Achtg: Keine Rückwirkg. d. Felds auf die PL mitgenommen, $\vec{r}_0(t)$ ist von außen vorgegeben, z.B. Beschleuniger

5.1.1. Die ruhende Punktladung (statische Monopol)

$\vec{B} = 0 \quad (v = \dot{\vec{r}}_0 = 0)\,, \quad \dot{\vec{B}} = 0$



$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \sim \frac{1}{R^2}$$

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

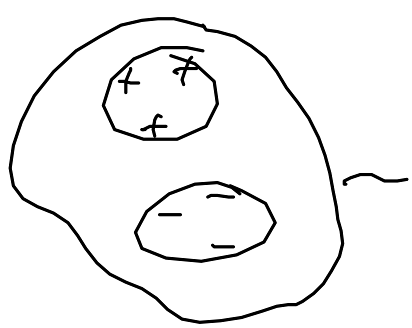
aus Potentialgl. für ϕ die $\rho = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ einsetzen

Poyntingvektor $S \sim \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = 0$ weil $\vec{B} = 0$ ist

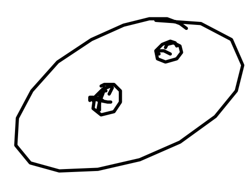
offensichtlich hängen Magnetfelder mit bewegten Ladungen zusammen.

5.1.2. Zwei ruhende Punktladungen

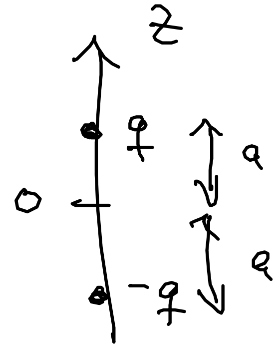
oftmals Systeme die insgesamt el. neutral sind $\left(Q = \sum_i q_i = 0\right)$, aber Ladungsschwerpunkt hat



Bsp. Atom



einfachstes Modell ist der mathematische Dipol:



- 2 Punktladungen q, $-q$
- $Q = q - q = 0$ Gesamtladg. 0
- Abstand der Punktladg. ist $2a$
- Klein Objekt untersuchen $a \to 0$
- soll aber noch nach außen wirken

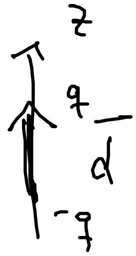
$$\underbrace{\begin{matrix} a \to „0\text{"}, & \text{gleichzeitig} \quad d = 2qa \\ q \to „\infty\text{"} & = \underline{\text{Konstant}} \end{matrix}}_{\text{mathematischer Dipol}}$$

d = Dipolmoment

$$\rho = q\Big(\underbrace{\delta(\vec r - a\vec e_z)}_{„\text{oben"}} - \underbrace{\delta(\vec r + a\vec e_z)}_{„\text{unten"}}\Big)$$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ q \to \infty \\ d = \text{Konstant}}} \rho = \lim \underline{q} \underbrace{\frac{\delta(\vec r - a\vec e_z) - \delta(\vec r + a\vec e_z)}{2a}}_{\text{Taylor f. klein } a} \underline{2a}$$

$$= d \lim\left(\frac{\delta(\vec r) - \delta(\vec r)}{2a} - \frac{\vec\nabla\delta(\vec r)\cdot a\vec e_z - \vec\nabla\delta(\vec r)\cdot a\vec e_z}{2a} \right)$$



$$= -d\,\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}\, \delta(\vec{r})$$

$$\underbrace{= -\vec{d} \cdot \vec{\nabla}\, \delta(\vec{r})}$$

Ladungsdichte eines mathemat. Dipols $\rho = -\vec{d} \cdot \vec{\nabla}\, \delta(\vec{r})$

Wie sehen Potential ϕ und Feldverteilung aus?

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Coulomb/Lorenz eichg. fallen zusammen, wenn $\vec{\beta} = 0$. $\quad \frac{\vec{v}}{c} = 0$

$(c \to \infty)$

$$\phi_D = -\int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{\nabla}'\, \delta(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

, jetzt partielle Integration (Randterme $\to 0$)

Dipol

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \delta(\vec{r}\,')\, \vec{d} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$\nabla' \to \nabla$ gibt Minus

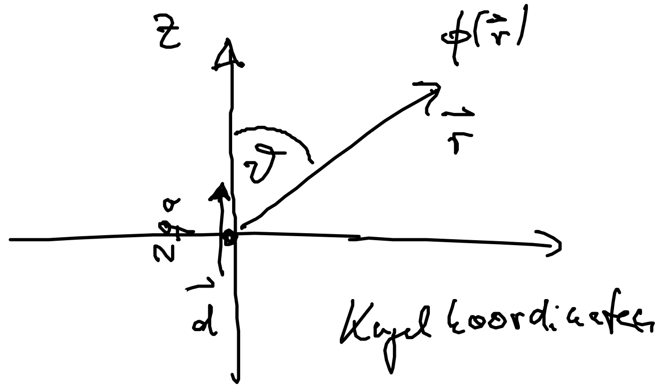
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \delta(\vec{r}\,')\, \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

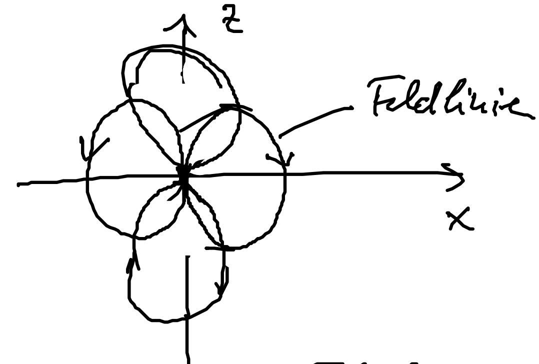
$$= -\frac{\vec{d}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

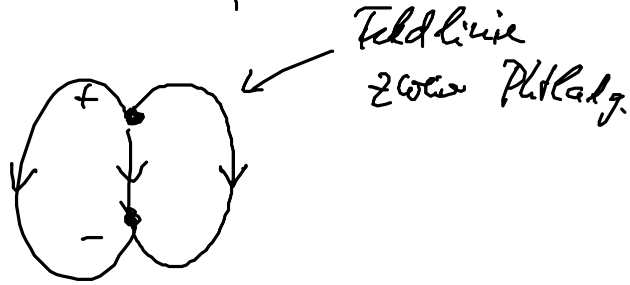
Dipolpotential: $\phi_D(\vec r) = \dfrac{\vec d \cdot \vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{d\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(bei $\vec r = 0$)

Äquipotentialflächen $r^2 \sim \cos\vartheta$







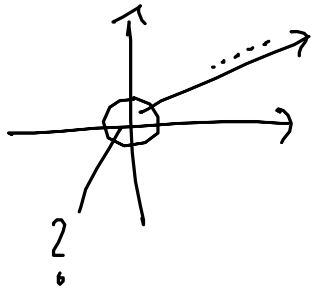
Felder aus $\vec E_D = -\vec\nabla \phi_D$

$$\vec E = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cos\vartheta}{r^3}\vec e_r + \frac{\sin\vartheta}{r^3}\vec e_\vartheta + 0\cdot\vec e_\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3\vec r(\vec d\cdot\vec r) - \vec d r^2}{r^5}$$

ÜA

Punktladg. / Dipol haben verschiedenes Verhalten vom Abstand?



Dipol : $\frac{1}{r^3}$

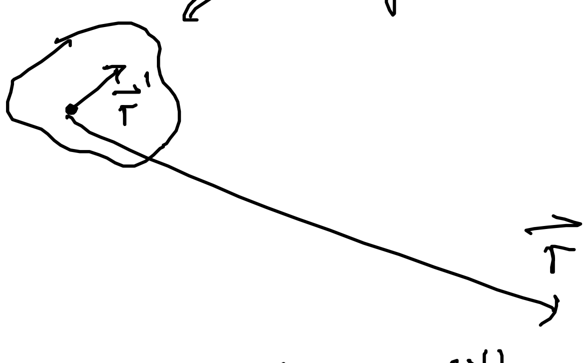
Monopol : $\frac{1}{r^2}$

Dipol hat keine Kugelsymmetrie.

5.1.3. Fernfeldentwicklung eines Punktladungshaufens

wenn die Details einer Ladungsverteilung uninteressant sind und man sich weit weg begibt (Fernfeld), so kann man i.a. eine Ladungsverteilung durch wenige Parameter beschreiben $(Q, \vec{d}, \overleftrightarrow{Q} \dots)$

beliebige Verteilung v. Punktladungen $\rho(\vec{r}\,')$



Beobachtungspunkt im Fernfeld $(|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|)$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec r\cdot\vec r\,'}} = \frac{1}{r}\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}}}_{\text{Taylorreihe}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+\underline{\varepsilon}}}$$

„Kleinheit“ nutzen

$$\frac{|\vec r\,'|}{|\vec r|} = \text{klein}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\right)^4 + \cdots\right)$$

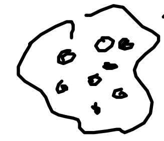
Ordnung	Ordnung:	Ordnung:		
1	$\frac{\lvert\vec r\,'\rvert}{\lvert\vec r\rvert}$	$\frac{\lvert r'^2\rvert}{\lvert r^2\rvert}$	$\cdots$	$\rightarrow$ zunehmend verschwindend

$$\phi(\vec r) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \cdots$$

ϕ_1 <u>Monopolterm</u>

Gesamtladung

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r\,')}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad Q = \int d^3r'\,\rho(\vec r\,')$$



Der erste Beitrag im Fernfeld ist der Monopolterm, verhält sich wie eine Punktladg. mit effektiver Ladg. Q.

Kugelsymmetrie !

ϕ_2 Dipolterm

(wichtig, wenn ϕ_1 nicht ausreicht od. Null ist)

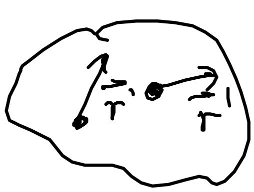
$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\vec r \cdot \vec r\,'}{r^3}\, \rho(\vec r\,') = \frac{\vec r \cdot \vec d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Sieht wie ein mathematischer Dipol mit $\vec d$, das so berechnet wird

$\vec d$ = Dipolmoment der Verteilg. der LT $= \int d^3r' \, \rho(\vec r\,')\, \vec r\,'$

„1. Moment" der Ladungsverteilung

Bemerkung: Das Dipolmoment hängt v. Koordinatensystem ab:



$$\vec d = \int d^3r' \, \rho(\vec r\,')\, \vec r\,' \qquad \vec r\,' \to \vec r\,' + \bar r$$

$$= \int d^3r' \, \rho(\vec r\,') \left(\vec r\,' + \bar r\right)$$

$$= \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,' + \underbrace{\int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\, \bar{r}}_{}$$

?

dieser Zusatzterm verschwindet nur wenn $\int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,') = 0 = Q$

Wenn die Gesamtladg. verschwindet, dann ist das Dipolmoment eindeutig definiert.