

Feld einer bewegten Punktladung:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(1-\beta^2)}{R^2 (1-\beta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} + \frac{\vec{e}_R \times (\vec{r}_R - \vec{r}) \times \dot{\vec{\beta}}}{cR (1-\beta^2 \cos^2 \theta)} \right)$$

$t = t(\vec{r}, t)$

zu kompliziert \rightarrow versuchen einfachere Grenzfälle

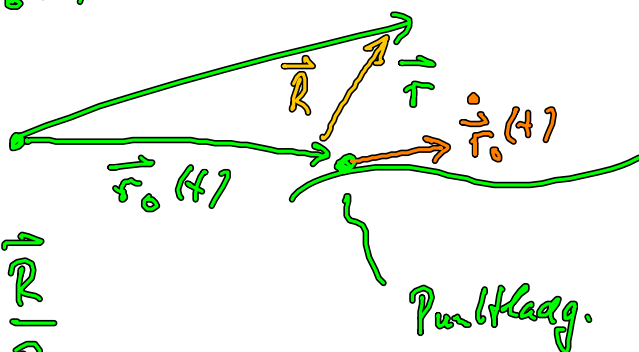
zu rekonstruieren

$$\vec{r}_R = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$$

$$R = |\vec{r}_R|$$

$$E(\vec{r}, t) = ?$$

$$\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c}, \quad t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$$



$$\vec{e}_R = \frac{\vec{r}_R}{R}$$

Grenzfälle: $\vec{\beta} = 0 \Rightarrow$ ruhende Punktladung

$\dot{\vec{\beta}} = 0, \vec{\beta} = \text{konstant} \Rightarrow$ gleichförmig bewegte PL

$\dot{\vec{\beta}} \neq 0 \rightarrow$ beschleunigte Punktladung

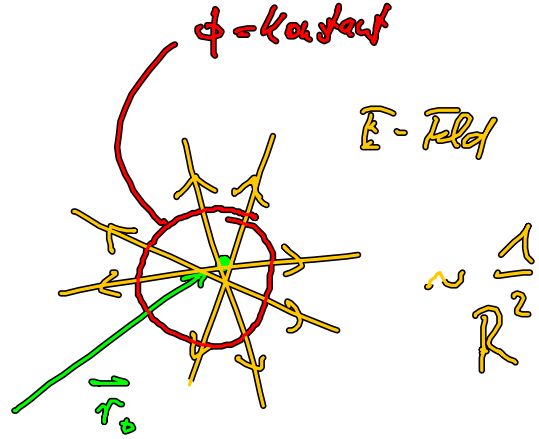
Achtg: keine Rückwirkg. d. Felds auf die PL mitgenommen,

$\vec{r}_0(t)$ ist von außen vorgegeben, z.B. Beschleuniger

5.1.1. Die ruhende Punktladung (statische Konfig.)

$$\vec{\beta} = 0 \quad (v = \dot{\vec{r}}_0 = 0) \quad , \quad \dot{\vec{\beta}} = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$



$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

aus Potentiellgl. für ϕ
die $\rho = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ erhalten

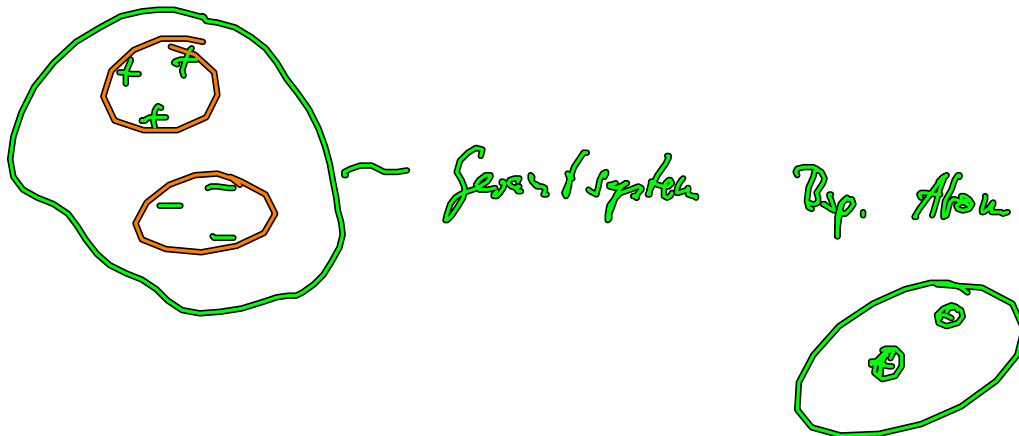
Poyntingvektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = 0$ weil $\vec{B} = 0$ ist

offensichtlich liegen Magnetfelder mit bewegte Ladungen zusammen.

5.1.2. Zwei ruhende Punktladungen

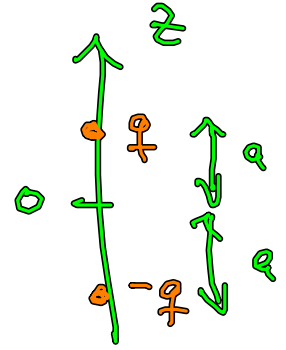
offenes System die insgesamt el. neutral sind

$(Q = \sum_i q_i = 0)$, aber Ladungsdipolmoment



einfachstes Modell ist der mechanische Dipol:

- 2 Punktladungen $q, -q$
- $Q = q - q = 0$ Gesamtladg. 0
- Abstand der Punktladg. ist $2a$
- klein Objekt untersuchen $a \rightarrow 0$
- soll aber noch nach außen wirken



$$a \rightarrow "0", \text{ gleichzeitig } d = 2qa$$

$$q \rightarrow " \infty " \quad = \underline{\underline{\text{Konstant}}}$$

$d = \text{Dipolmoment}$

mathematisch Dipol

$$\rho = q \left(\underset{\text{"oben"}}{\delta(\vec{r} - a\vec{e}_z)} - \underset{\text{"unten"}}{\delta(\vec{r} + a\vec{e}_z)} \right)$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ d = \text{konstant}}} \rho = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ d = \text{konstant}}} q \underbrace{\frac{\delta(\vec{r} - a\vec{e}_z) - \delta(\vec{r} + a\vec{e}_z)}{2a}}_{\text{Taylor f. klein } a} \underline{\underline{2a}}$$

$$= d \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ d = \text{konstant}}} \left(\frac{\delta(\vec{r}) - \delta(\vec{r})}{2a} - \frac{\vec{\nabla} \delta(\vec{r}) \cdot a\vec{e}_z - \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) \cdot (-a\vec{e}_z)}{2a} \right)$$

$$\begin{aligned} &= -d \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) \\ &= -\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) \end{aligned}$$

Ladungsdichte eines mathem. Dipols $\rho = -\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r})$

Wie sehen Potential ϕ und Feldverteilung aus?

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Control / Kontrolle: falls zusammen, wenn $\vec{p} = 0$. $\frac{1}{c} \rightarrow 0$

($c \rightarrow \infty$)

$$\phi_D = - \int d^3r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{\nabla}' \delta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ fällt partielle Integration (Randterme } \rightarrow 0)$$

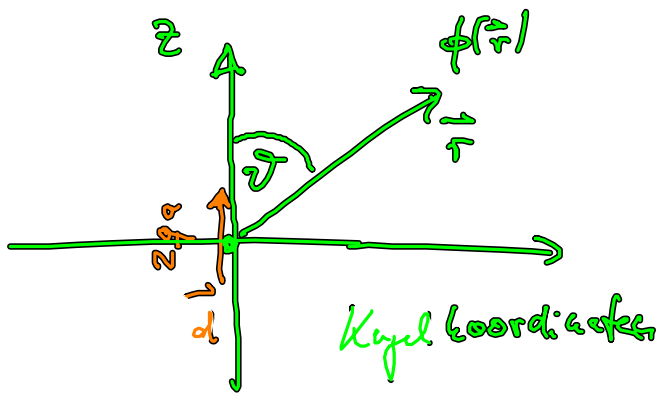
Dipol \rightarrow

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(\vec{r}') \vec{d} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{\nabla}' \rightarrow \vec{\nabla} \text{ gibt Minus}$$

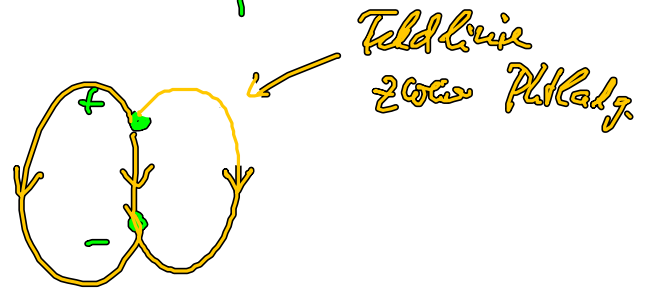
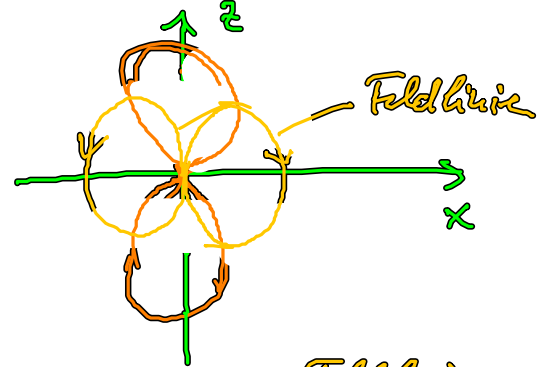
$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(\vec{r}') \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= - \frac{\vec{d}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Dipolpotential: $\phi_D(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
 (bei $\vec{r} = 0$)



Äquipotentialflächen $r^2 \sim \cos\vartheta$



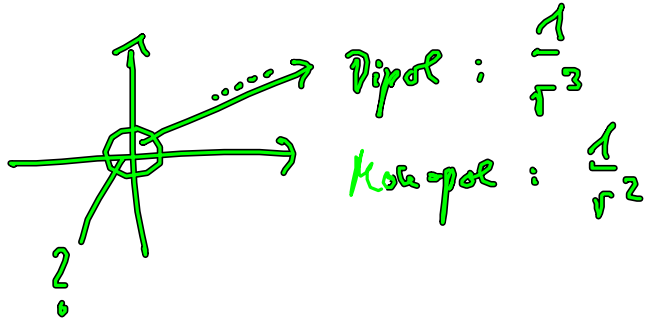
Feld aus $\vec{E}_D = -\vec{\nabla}\phi_D$

$$\vec{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\cos\vartheta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\sin\vartheta}{r^3} \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{d} \cdot \vec{r}) - \vec{d}r^2}{r^5}$$

UA

Punktladg. / Dipol haben unterschiedliches Verhalten von Abstand?

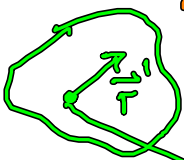


Dipol hat keine Kugelsymmetrie.

5.1.3. Fernfeldentwicklung eines Punktladungskonzentration

wenn die Details der Ladungsverteilung uninteressant sind und man sich weit weg befindet (Fernfeld), so kann man i.e. eine Ladungsverteilung durch wenige Parameter beschreiben ($Q, \vec{d}, \vec{Q} \dots$)

← beliebige Verteilung v. Punktladungen $\rho(\vec{r}')$



Beobachtungspunkt ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$)
 im Fernfeld

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

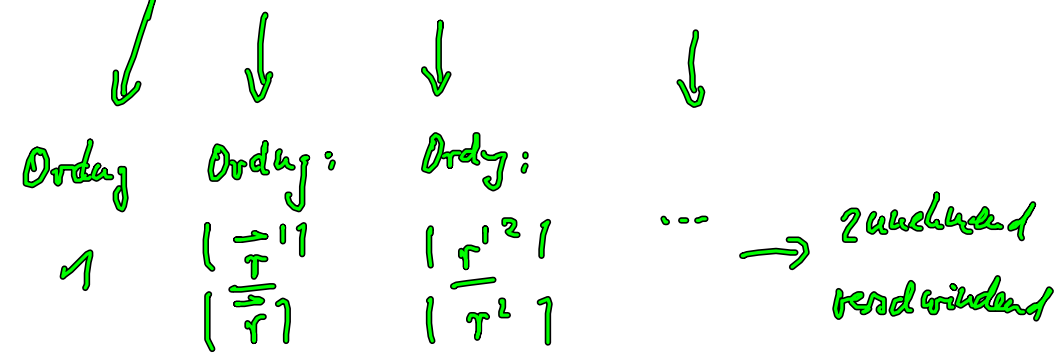
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \epsilon}}$$

↑
"kleinheit" nutzen

Taylorreihe

$$\frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} = \text{klein} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right)$$




↓

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots$$

ϕ_1 Monopolterm

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

← Gesamtladung
 $Q = \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}')$



The diagram shows an irregularly shaped region containing several small dots, representing a localized charge distribution. An arrow points from the text 'Gesamtladung' to the region.

Der erste Beitrag im Fernfeld ist das Monopolterm,
 verhält sich wie ein Punktladg. mit effektiver Ladg. Q .
 Kugel-symmetrie!

ϕ_2 Dipolterm (nützlich, wenn ϕ_1 nicht ausreicht oder Null ist)

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \rho(\vec{r}') = \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{d} = \text{Dipolmoment} = \int d\tau' \rho(\vec{r}') \vec{r}'$$

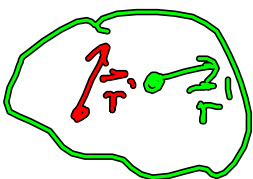
des Verteilg.
des LT

↑
 sieht wie ein
 mathematisches
 Dipol und \vec{d}

das so brechen wird

„1. Moment“ der Ladungsverteilung

Bemerkung: Das Dipolmoment hängt v. Koordinatensystem ab:



$$\vec{d} = \int d\tau' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \quad \vec{r}' \rightarrow \vec{r}' + \vec{r}$$

$$= \int d\tau' \rho(\vec{r}') (\vec{r}' + \vec{r})$$

$$= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}}{r'} + \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}}_{\text{dieses Zusatzterm verschwindet nur wenn } \int d^3r' \rho(\vec{r}') = 0 = Q}$$

?

Wenn die Gesamtladg. verschwindet, dann ist das Dipolmoment eindeutig definiert.