5.2. Gleichförmig-geradlinig bewegte Punktladung

5.2.1. Diskussion der Felder

$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \sim$ Konstante, $\dot{\vec{\beta}} = 0$

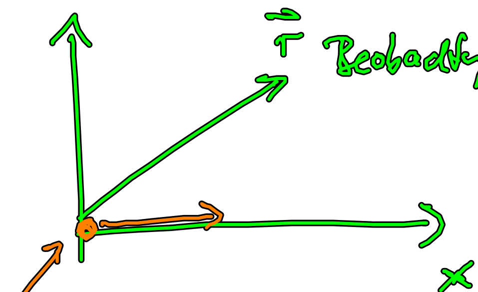
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1-\beta^2)(\vec{e}_R-\vec{\beta})}{R^2\,(1-\vec{\beta}\vec{e}_R)^3}\right)\Bigg|_{t'=t'(\vec{r},t)} \quad , \quad \vec{\beta} \neq 0$$

$\dot{\vec{\beta}} = 0$

relativistische Korrekturen

retardierte Zeit

$$t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}$$



$\vec{r}$ Beobachtungspunkt zur Zeit t $\vec{E}(\vec{r},t)$

Punktladung auf x-Achse

$\vec{r}_0(t) = v \cdot t$
$= \dot{\vec{r}}_0 \cdot t$
mit v = konstant

Müssen diskutieren: $\vec{e}_R - \vec{\beta} = ?$, $(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)^3$ bei t'

$\vec{\beta} = \frac{v}{c}\vec{e}_x$

x-Komponente ($y_0 = z_0 = 0$)

$$\left(\vec{e}_R{}' - \vec{\beta}\right) = \frac{\vec{R}(t') - \vec{\beta}R(t')}{R(t')} = \left|\,\frac{x - vt' - \beta(x-vt')}{R(t')}\right.$$

" ' " werden bei $t' = t'(\vec{r},t)$

$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$ Abstand zwischen Punktladung und Beobachtungspunkt eingesetzt, aus

$$= \frac{(1-\beta)(x - v t')}{R(t')} \qquad t' = t - \frac{x - v t'}{c} \;\Rightarrow\; t' = \frac{t - x/c}{1-\beta}$$

$$= \frac{(1-\beta)x - v\left(t - \frac{x}{c}\right)}{R(t')}$$

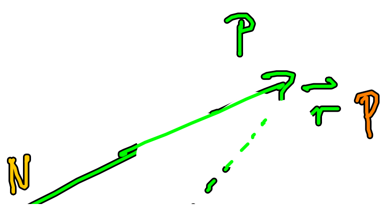
man hat das auf t zurückgeführt.

$$= \frac{x - v t}{R(t')} = \frac{x - x_0(t)}{R(t')} \Longrightarrow \frac{\vec{R}(t)}{R(t')}$$

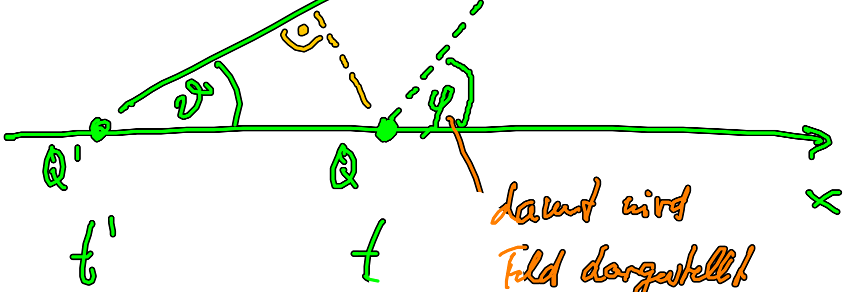
$$\boxed{\vec{e}_R{}' - \vec{\beta} \to \frac{R(t)}{R(t')}}$$

merke f. die Formel am Beginn der VL

ebenso zu bestimmen: $1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R{}' = ?$



– Feld zur Zeit t am Ort $\vec{r}$ beobachten,



- die Punktladg. erzeugt Feld zur Zeit t' und bewegt sich aber während der Zeit $t-t'$ weiter

1) $\overline{Q'Q} = v(t-t') = \frac{v(x - v t')}{c} = \beta R(t')$

Strecke die die Punktladung zurücklegt

Def. der retardiert Zeit

2) $\overline{Q'N} = \beta R(t') \cos\vartheta$

3) $\overline{NP} = R(t') - R(t')\beta\cos\vartheta = R(t')(1-\vec{e}_R\cdot\vec{\beta})$

4) $\overline{NP}^2 = R^2(t) - \underbrace{R(t')^2\beta^2\sin^2\vartheta}_{\overline{QN}^2}$

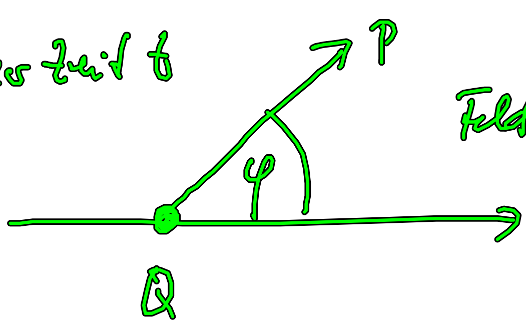
$(3)^2 = 4) \longrightarrow R^2(t')(1-\vec{e}_R\cdot\vec{\beta})^2 = R^2(t) - R^2(t')\beta^2\sin^2\vartheta$

$= R^2(t)(1-\beta^2\sin^2\varphi)$

beide Rechnungen einsetzen:

$$\vec{E}(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{R}(t)(1-\beta^2)}{R^3(t)(1-\beta^2\sin^2\varphi)}\right)^{3/2}$$

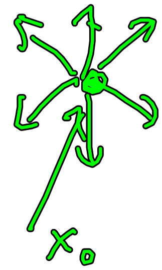
Messg zur Zeit t



Feldverteilg. als Fkt. d. χ φ

Was ist der Unterschied zu ruhender Punktladung:

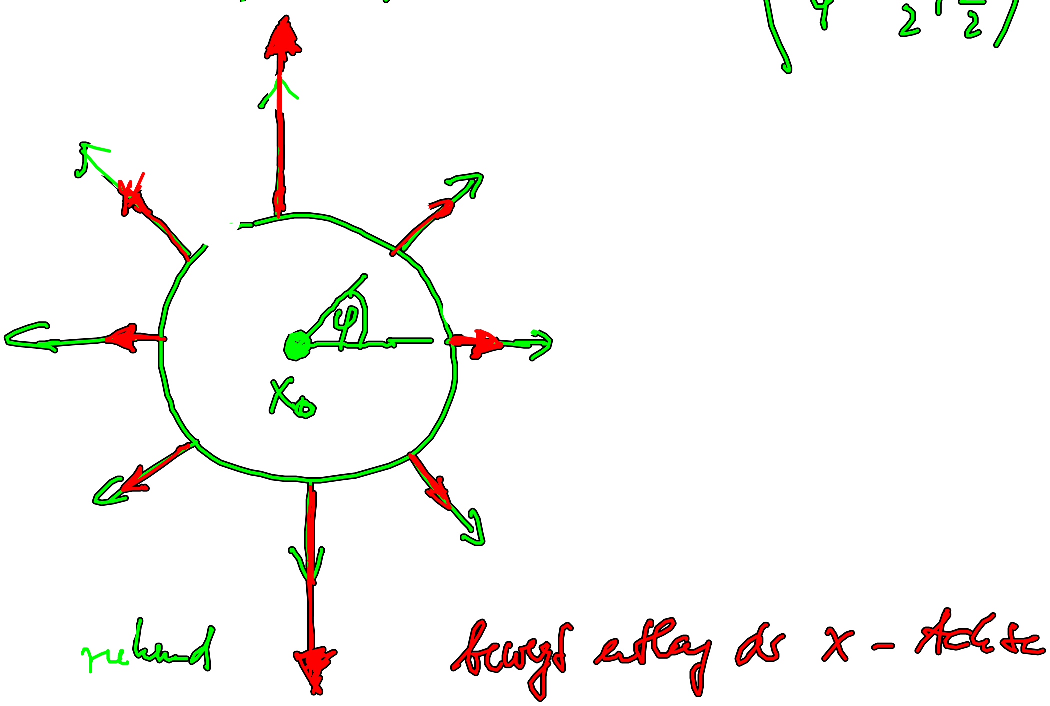
$$\vec{E}_{ruhend}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$



$\beta = 0$

Verhältnis $|\vec{E}| / |\vec{E}_{ruhend}|$ zu fester Zeit

$$\underbrace{\phantom{|\vec{E}| / |\vec{E}_{ruhend}|}}_{\displaystyle \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi = 0, \pi \\ \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta^2 < 1 \\ \\ 1/\sqrt{1-\beta^2} > 1 \end{pmatrix}$$



Offensichtlich wird in Bewegungsrichtg. das Feld verkleinert, $\perp$ dazu vergrößert.

Kommentar: für bewegte Ladung existiert ein Magnetfeld, kann angegeben werden

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{e}_R\,' \times \vec{E}(\vec{r},t)}{c}$$

Siehe oben

langsam bewegte Punktladg. $\beta \to 0$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{\vec{e}_R(t') \times \vec{R}(t)}{R^3(t)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{\Big(\overbrace{\vec{\beta} + \frac{\vec{R}(t)}{R(t')}}^{\text{Siehe oben}}\Big) \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\dot{\vec{r}}_0(t) \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

$$= \frac{q\mu_0}{4\pi}\,\frac{\dot{\vec{r}}_0(t) \times \vec{R}(t)}{R^3(t)} \qquad (\perp \vec{E}\text{-Feld})$$

Magnetfeld einer langsam bewegten Punktladg.

5.2.2. Fernfeld einer Strominsel

Fernfeld $\vec{B}$

$|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$

kennen bereits $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}}{r^3} + \dots$

Formel f. Vektorpotential ($c \to \infty$) in Coulombeichung

alle Punktladg. im endlich Volumen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}' \, \vec{j}(\vec{r}') \ \ldots$$

$\longrightarrow$ fällt mit Entfernung. ab

1. Term ist Null und der 2. Term trägt als führender Term bei : $\nexists$ kein magnetischer Monopol, erster Term $\neq 0$ ist Dipolterm, hat analoge Struktur wie der elektrische Dipolterm (gleich)

1. Term $= 0$?

bilden

$$\sum_i \partial_i \left(j_i(\vec{r})\, x_k \right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\, x_k + j_k$$

weil $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}}_{\approx 0 \text{ f. langsame Ladungen}}$ $\longrightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot$ auf beide Seite $\longrightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$$\sum_i \partial_i (j_i x_k) = j_k \qquad \Big| \int d^3r$$

$$\underbrace{\int d^3r \sum_i \partial_i \left(j_i(\vec r)\, x_k\right)} = \int d^3r\, j_k(\vec r)$$

wenn das Null ist, ist $\int d^3r\, \vec j(\vec r) = 0$

und der Monopolterm ist weg

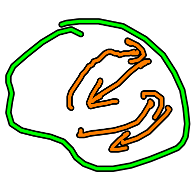
$$\sum_{i=1,2,3} \underbrace{\int dx_1 \int dx_2 \int dx_3}_{\int d^3r} \underset{3}{\underset{\shortparallel}{\partial_i}} \left(j_i(x_1,x_2,x_3)\, x_k\right) =$$

z.B. $i=3$ $\quad = \int dx_1 \int dx_2\, j_3(x_1,x_2,x_3)\, x_k \Big|_{-\infty = x_3}^{+\infty = x_3}$

wenn die Verteilg. lokalisiert ist

$$j_3(x_1,x_2,\pm\infty)\, x_k = 0$$

$\int d^3r\, \vec j(\vec r) = 0$ bedeutet auch anschaulich:



Stromwege heben sich weg.

nachdem Monopol $= 0$ $\rightarrow$ berechnen d. Dipolterms:

$$\int d^3r\, \vec{r}\cdot\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}\,\vec{r}\times\int d^3r'\,\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')$$

diese Größe definiert das magnetische Dipolmoment

$$\underbrace{\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\vec{r}\times\vec{\mu}}{r^3}}_{\text{analog}}\,, \quad \underbrace{\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')}_{\text{magnetisches Dipolmoment}}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Dipolpotential d. el. Felds

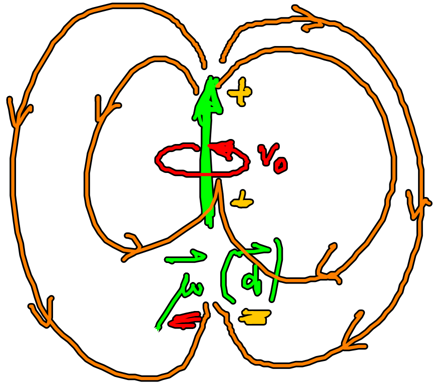
$\longrightarrow$ geht beides mit $\frac{1}{r^2}$, und Analogie $\vec{r}\times\vec{\mu}$, $\vec{r}\cdot\vec{d}$

$\vec{\mu}, \vec{d}$ werden nur durch die Verteilg. in dem Volumen $\vec{r}'$ definiert.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi\,, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{r}\,(\vec{d}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{d}}{r^5} \quad \Bigg| \quad \vec{B} = \frac{3\vec{r}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{\mu}}{r^5}$$

Die Dipolfelder haben exakt dieselbe Struktur:



Während der einfachste Modell für ein elektr. Dipol 2 Ladungen sind, ist es f. den magnet. Dipol ein Kreisstrom:

Drehimpuls

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r' \, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{1}{2} q \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \left(\frac{m}{m}\right) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \vec{L}_0$$

$$\vec{j} = q \vec{v}_0 \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Magnetische Felder sind mit dem Drehimpuls der mikroskopisch bewegl. Teilch. verbunden