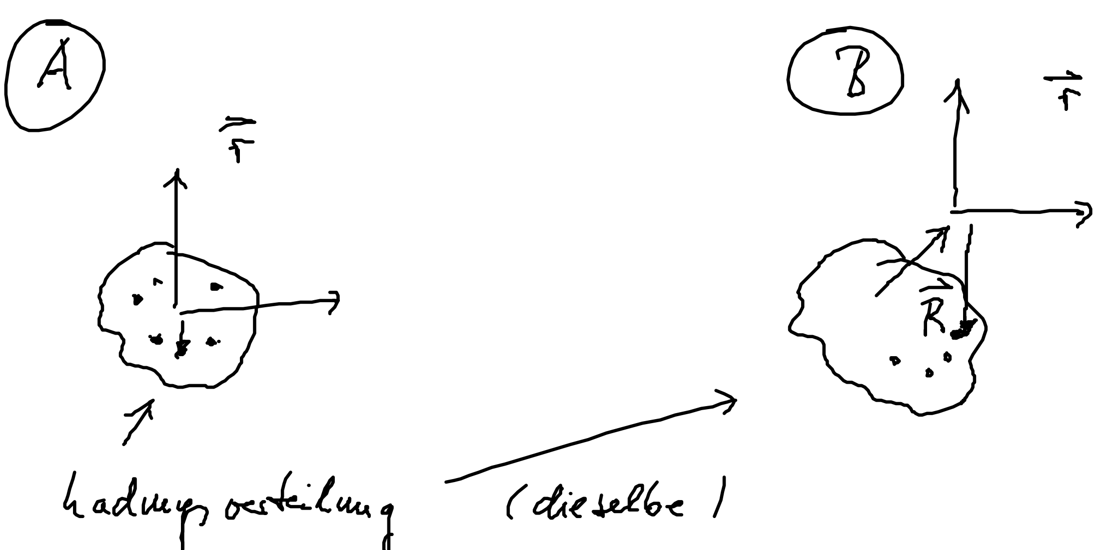
2 Nachträge:

1) Dipolmoment + Koordinatensystem

2.) $$\int d^3r' \, \vec{r} \cdot \vec{r}' \, \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \int d^3r' \, \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$$

zu 1.)

i.a. hängt das Dipolmoment vom Koordinatensystem ab:



$$\vec{d}_A = \int d^3r\, \vec{r}\, \rho_A(\vec{r}) \qquad \vec{d}_B = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho_B(\vec{r}')$$

$$\rho_A(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \qquad \rho_B(\vec{r}') = \rho(\vec{r}' - \vec{R})$$

$$\vec{d}_B = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho_B(\vec{r}') = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho(\vec{r}' - \vec{R}) = \left| \vec{r}' = \vec{r}' + \vec{R} \right|$$

$$= \int d^3r' (\vec{r}' + \vec{R})\, \rho(\vec{r}') = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho(\vec{r}') + \vec{R} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}')$$

$$= \vec{d}_A + \vec{R}\, \underset{\uparrow \text{ Gesamtladung}}{Q}$$

$\vec{d}_A \neq \vec{d}_B$ im allgemeinen

Wenn $Q = 0$, also der Monopolterm verschwindet, sind die Dipolmomente identisch und das Dipolmoment an sich ist eine gute Charakterisierung der Verteilung

(gilt allgemein für den Fall, daß die jeweils „tieferen" Momente verschwinden) zu 2.) $\displaystyle\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \longrightarrow$ magnetisch Dipolmoment (z.z.)

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{j}(\vec{r}\,')} + \frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{letzte VL}}$$

$$= \quad \text{-"-} \quad + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \sum_i \partial_i' \left(j_i(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' \right)}$$

partielle Integration (Randterm $\to 0$)

$$= -\vec{r}\cdot\int d^3r' \sum_{ij} \Big(\underbrace{\partial_i' \, x_j' \, \vec{e}_j}_{\vec{r}\,' \text{ (war mal)}}\Big) j_i(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'$$

$$= -\vec{r}\cdot\int d^3r' \sum_i \vec{e}_i \, j_i(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'$$

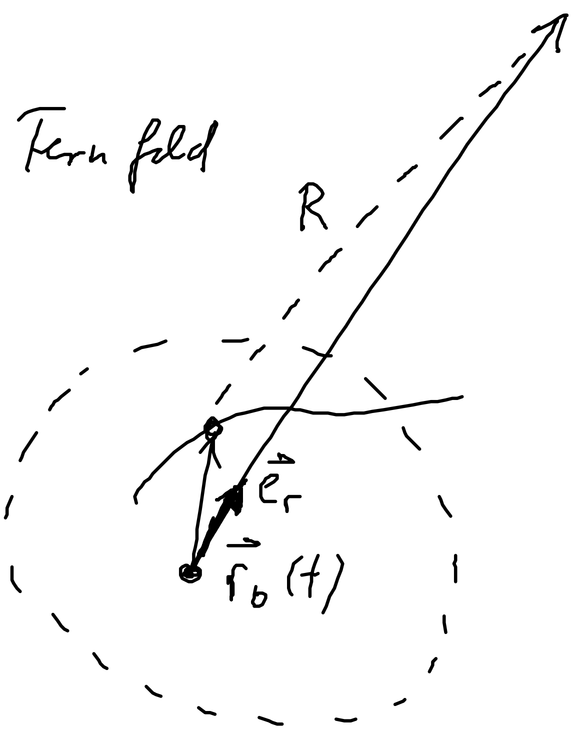
$$= -\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'$$

$$= \int d^3r' \, \frac{1}{2}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{j}(\vec{r}\,') - \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{r}\,\vec{r}\,' \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\vec{r} \times \underbrace{\int d^3r' \, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{magnetisch Dipolmoment}}$$

5.3. Beschleunigt bewegte Punktladung – Fernfeld

Fernfeld



$\vec{r}$, mit $E(\vec{r}, t) = ?$

$$E = \cancel{E_{Nahfeld}} + E_{Fernfeld}$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{R^2}\right)} \qquad \left(\frac{1}{R}\right)$$

$\Downarrow$

f. große Entfernungen

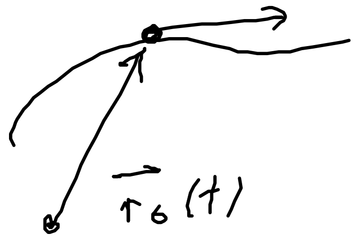
$E_{Fernfeld} \longrightarrow$ Approximation $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$

$\vec{R} \rightarrow \vec{r}$ (weit weg)

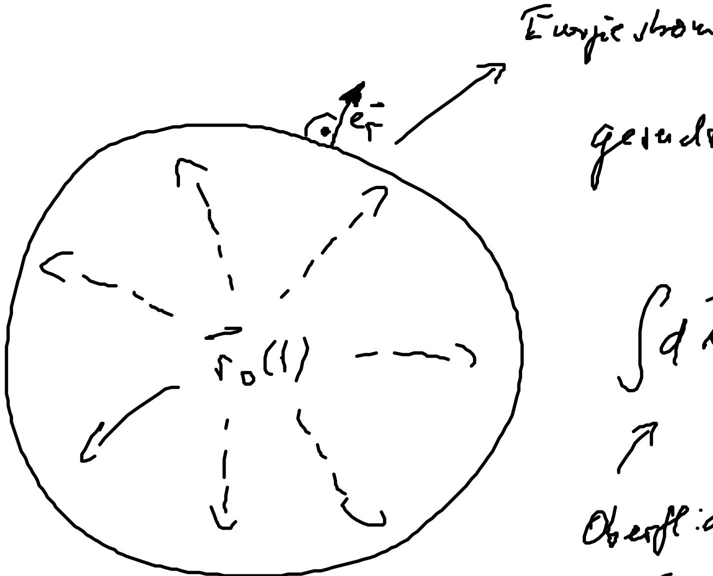
$t' \longrightarrow t - \frac{r}{c}$ (Laufzeit $\frac{|\vec{r}_0|}{c} \ll \frac{|\vec{r}|}{c}$)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{e}_r \times \left\{ (\vec{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\}}{c r (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_r)^3} \qquad \vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c}$$

$\dot{\vec{r}}_0(t)$



$$\vec B(\vec r,t) = \frac{\vec e_r \times \vec E(\vec r,t)}{c}$$



gesucht ist Energiefluß d. gesamte Kugel

$\int d\vec A \cdot \vec S \;\hat{=}\;$ Energie pro Zeit durch Kugel

Oberflächeintegral
(r)

$$\int d\vec A \cdot \vec S = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Oberfläche}} \; \vec e_r \cdot \vec S \qquad \vec S = \frac{\vec E \times \vec B}{\mu_0}$$

$\vec e_r \cdot \vec S = ?$, setze $\vec C = \vec e_r \times \left[(\vec e_r - \vec \beta) \times \dot{\vec \beta}\right]$

$$\vec S \sim \underbrace{\vec C}_{\vec E} \times \underbrace{(\vec e_r \times \vec C)}_{\sim \vec B} = (\vec C \cdot \vec C \, \vec e_r - \vec C \cdot \vec e_r \, \vec C)$$

$\vec C \perp \vec e_r$

$\vec S \cdot \vec e_r \overset{\sim}{=} \vec C \cdot \vec C$, weil $\vec C \cdot \vec e_r = 0$

$$= \underbrace{\frac{q^2}{\mu_0 (4\pi\varepsilon_0)^2 c^3 r^2}}_{\frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c r^2}} \frac{\left|\vec{e}_r \times (\vec{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right|^2}{(1 - \vec{e}_r \cdot \vec{\beta})^6}$$

$$\left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2\right)$$

Energie / Zeit durch Kugel:

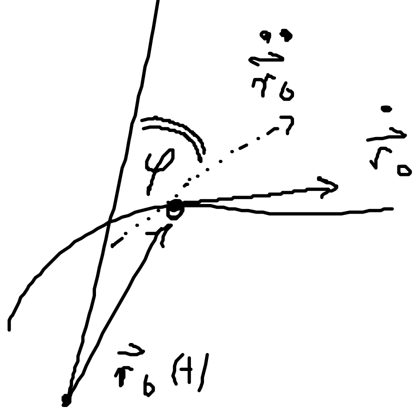
$$\int d\vec{A} \cdot \vec{S} = 4\pi r^2 \vec{e}_r \cdot \vec{S} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\left|\vec{e}_r \times \{(\vec{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}\right|^2}{(1 - \vec{\beta}\vec{e}_r)^6}$$

5.3.1 Langsam beschleunigte Ladung

$v_0 = |\dot{\vec{r}}_0| \ll c \implies \beta \to 0$ womit 1 verglichen wird

$$\int d\vec{A} \cdot \vec{S} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \underbrace{\left|\vec{e}_r \times \left(\vec{e}_r \times \ddot{\vec{r}}_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\right|^2}_{\left|\left(\ddot{\vec{r}}_0 - \vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{r}}_0 \, \vec{e}_r\right)\right|^2}$$

$\vec{r}$

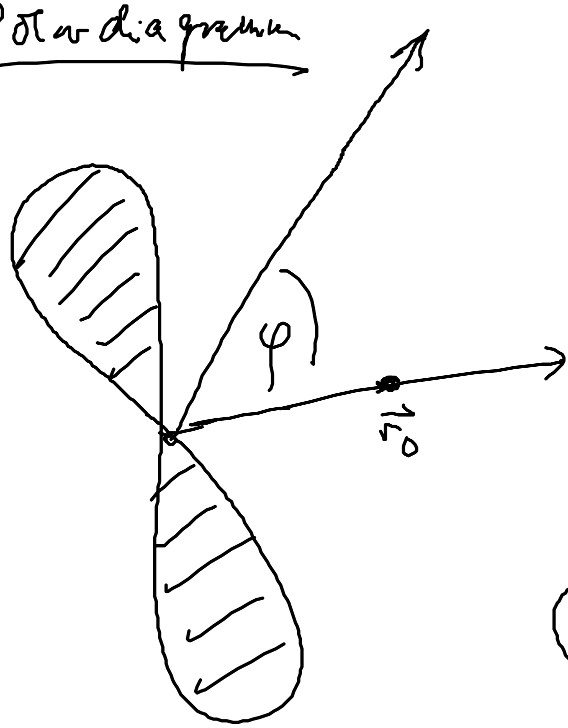


$$|\ddot{\vec r}_0|^2 - 2|\ddot{\vec r}_0|^2\cos^2\varphi + |\ddot{\vec r}_0|^2\cos^2\varphi$$

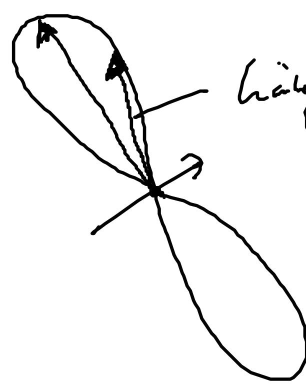
$$= |\ddot{\vec r}_0|^2(1-\cos^2\varphi)$$

$$= |\ddot{\vec r}_0|^2 \sin^2\varphi \;\hat{=}\; \text{Stärke der Abstrahlung}$$

<u>Polardiagramm</u>



$$\dot{\vec r}_0 \sim \ddot{\vec r}_0 \sim \vec r_0$$



Länge als Maß der abgestrahlten Energie

Die langsam bewegte, aber beschleunigte Punktladung strahlt $\perp$ zu ihrer Beschleunigungsrichtung.

5. 3. 2. Schnell bewegte Punktladung

$\beta \to 1$ soll zugelassen werden

$$\int d\vec{A}\cdot\vec{S} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left|\vec{e}_r \times (\vec{e}_r - \cancel{\vec{\beta}}) \times \dot{\vec{\beta}}\,\right|^2}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_r)^6}$$

wird Ernst genommen

$\vec{\beta} \sim \dot{\vec{\beta}} \sim \vec{r}_0$

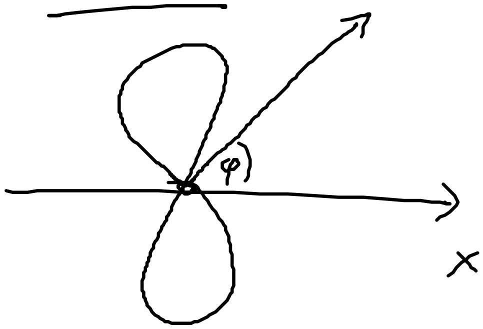
Linear-beschleuniger

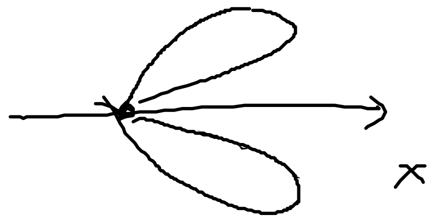
$\vec{E}_0$ anlegen in 1 Richtg.
(x-Richtg.)

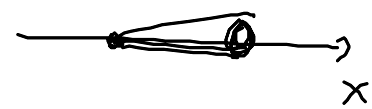
Winkelverteilg. wird komplizierter:

$$\frac{\sin^2\varphi\;\dot{\beta}^2}{(1-\beta\cos\varphi)^6}$$

$v \ll c$ ($\beta \to 0$ im Nenner) | $v < c$ | $v \approx c$







diese Kurve bekannt in ÜA, erstellt sie über eine

Bedingung d. maximalen Abstrahlrichtung:

$$\partial_\varphi \left(\frac{\sin^2 \varphi}{(1-\beta \cos\varphi)^6} \right) = 0 \Rightarrow \varphi_{max}$$

$$\cos^2 \varphi_{max} + \frac{1}{2\beta} \cos\varphi_{max} - 3 = 0$$

$$\cos(\varphi_{max}) = -\frac{1}{4\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{16\beta^2} + \frac{3}{2}}$$

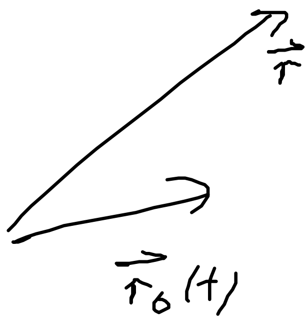
beschreibt den Übergang $\varphi_m = \frac{\pi}{2} \to \varphi_m = 0$

f. $\beta = 0 \to$ „$\beta = 1$“

$\beta = 0 \to \varphi_{max} = \frac{\pi}{2}$

$\beta \to 1 \to \varphi_{max} = 0$

5.3.3 Spektrale Eigenschaften der Emission



Detektor $E(\omega)$, gemessen über Spektrometer

$$|E(\omega)|^2 \to I(\omega)$$

spektrale Intensität

langsam bewegte Ladg. + einfaches Modell: entlang x-Richtg.

$$E(t) \leftarrow \ddot{\vec r}_0(t) \qquad E(\omega) = \int dt\, e^{i\omega t}\, E(t) \sim \ddot x_0(t)$$

Newtonsche Bewegungsgl.:

externes Feld d. Beschleunigers

$$\ddot x_0 = -\gamma \dot x_0 + \frac{q E_0}{m}\,\Theta(t)$$

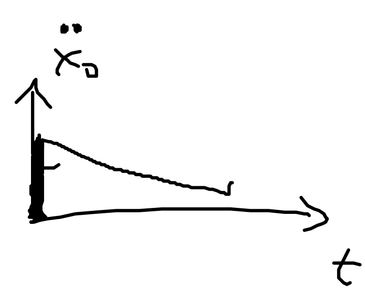
Dämpfg., z.B. in Materie

„billig-Modell"

→ „Bremsstrahlung"

$$\dot v_0 = -\gamma v_0 + \frac{q E_0}{m}\,\Theta(t)$$

$$\longrightarrow \ddot x_0 = \frac{q E_0}{m}\, e^{-\gamma t}$$



$$E(\omega) \propto \int_0^\infty dt\, e^{i\omega t} e^{-\gamma t} = \frac{1}{i\omega - \gamma}$$

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}$$

Bremsstrahlung: typisches Verhalten: kontinuierliches Spektrum mit Abschneideparameter

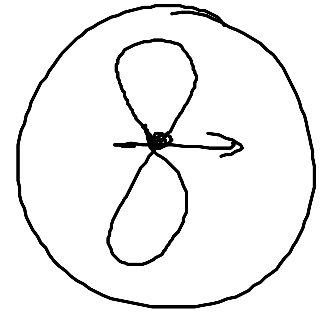
5.3.4 Strahlungsdämpfung

in der obigen Newtongleichung ist noch nicht die Dämpfg. der Bewegg. durch den Energieverlust durch Strahlungsabgabe enthalten.

$\beta \to 0$ (nichtrelativistischer Fall)

emittierte Energie auf der Kugeloberfläche:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,|\ddot{\vec{r}}_0|^2 \sin^2\varphi$$



integriere über φ, um Gesamtabstrahlg. zu bekommen,

o.B. gilt $\sin^2\varphi \to \frac{2}{3}$.

<u>Mechanik</u>: Verlustleistg. bei Nichtpotentialkraft

$$E = \int dt\; \underbrace{\vec{v}_0(t)\cdot \vec{F}_{rad}(\vec{r}_0)}_{①} \quad = \text{Anteil der dissipativen Kräfte}$$

kinet. + pot. E.

radiation Kraft

„Kraft die die Strahlungsdämpfg. verursacht"

$$\int dt\; \underline{\text{Leistg}_{rad}} = \int dt\; \underbrace{\frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}_{②}\; \dot{v}_0^2(t)$$

Verluste

① = − ②

$$= -\int dt\; \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\; \dot{v}_0 \frac{d}{dt} v_0$$

$$= \int dt\; \underline{-\;''\;-}\;\; v_0 \cdot \underline{\ddot{v}_0}$$

$$\vec{F}_{rad}$$

$$\dot{V}_0 = \vec{F}_{rad} + \vec{F}_{extern} \quad (\text{Beschleuniger})$$

$$\left(\dot{\vec{V}}_0 - \ddot{\vec{V}}_0 \tau_{rad}\right) = \vec{F}_{ext}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_0 - \tau_{rad}\,\dddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}_{ext}}$$

Die Strahlungsdämpfg. ist proportional zur dritten Zeitableitg. d. Ortsvektors.