6. Formulierung der Elektrodynamik für makroskopische Systeme

Für ein makroskopisches System ist die Adressierung (viele $\vec{r}_0(t)$) nicht mgl.

Daher muß man zu effektiver Beschreibung übergehen: dazu uns Felder typischer Wellenlänge

$$\lambda \approx \frac{2\pi}{k}$$

ansehen, für die gilt:

$$a_0 \quad < \quad l \quad < \quad \lambda$$

atomare Skala	mesoskopische	Wellenlänge
(Å)	Längenskala	(z.B. 500 nm)

$\underbrace{\hspace{6cm}}$ $\underbrace{\hspace{6cm}}$

„drüber mitteln"

→ Effektivmodelle

auf dieser Skala gelten die neuen, gemittelten Gleichg.

2.B. Plasmonik

müssen eine Möglichkeit finden, Punktladungsphysik (El / Kern) loszuwerden; führe dazu analog zu Exp. eine Mittelungsfunktion ein $\longrightarrow$

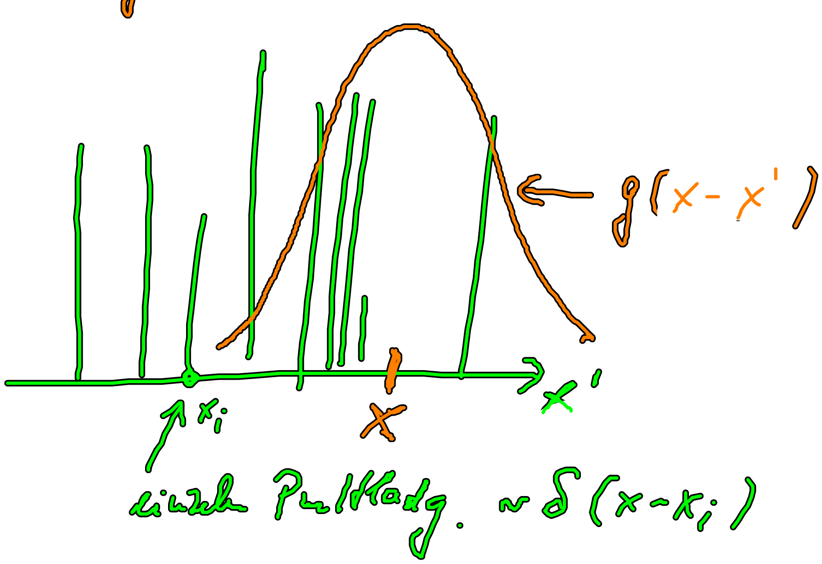
führt zu effektiven Maxwellgleichungen (makroskop.)

durch die Mittlg. mit Funktion $g(\vec r) = g(r)$

mittlere Größe: $\langle \underbrace{\rho(\vec r, t)}_{\text{Punktladungen}} \rangle = \int d^3 r' \, g(\vec r - \vec r') \, \rho(\vec r', t)$

gemittelt mit g

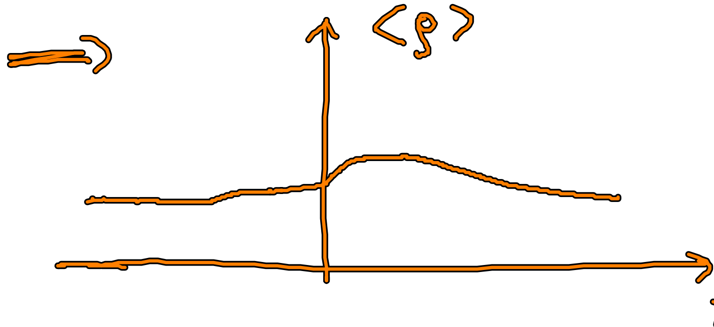
normiert



durch das Integrieren über alle Pktladg. in der Umgebung von $x(\vec r)$ zählt man die Ladungen im Mittlungsvolumen.

$\Longrightarrow$ verschwindet Pktladungsstruktur, man zählt nur die

Ladung im Mittelvolumen am Ort $\vec r$



gemittelte Ladungsdichte

Ziel: Maxwellgleichg. mitteln,

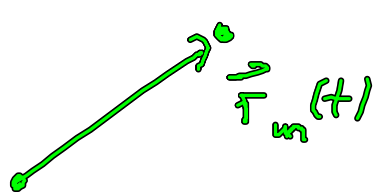
zunächst $\rho(\vec r, t)$, $\vec j(\vec r, t)$

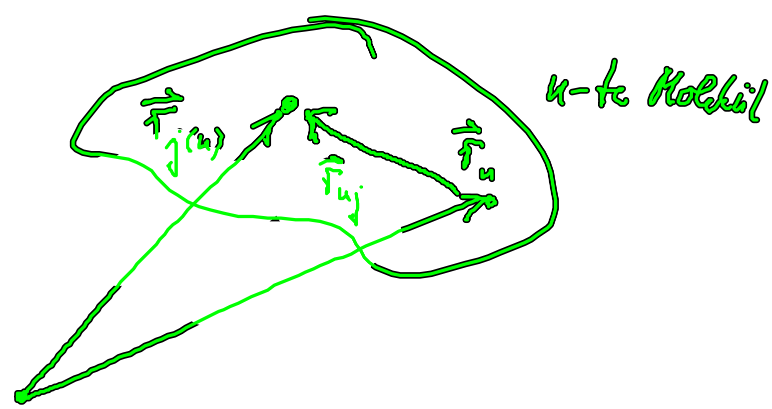
6.1. Makroskopische Ladungen u. Ströme

6.1.1. Ladungsdichte

$$\langle \rho(r,t) \rangle = \sum_i q_i \langle \delta(\vec r - \vec r_i) \rangle$$

Unterschidg. v. Ladungen





freibewegliche:

Elektron in Metall

in atomare Komplexe gebundene Teilchen:

El. in Molekülen

Teilchen im Plasma

j-tes Teilchen im n-ten Molekül $\vec{r}_{j(n)}$

$\vec{r}_n$ sei Schwerpunkt des Moleküls

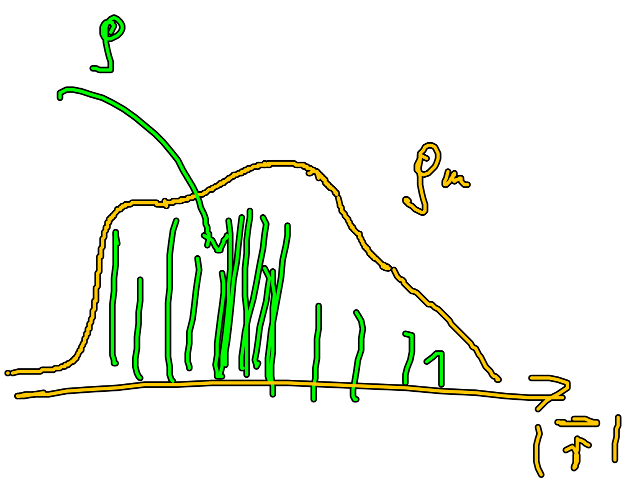
vor der Mittlg. $\rho(\vec{r},t) = \sum_n q_n \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) + \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_{j(n)}(t))$

6.1.1.1. Freibewegliche Ladungen

$$\langle \rho(\vec{r},t) \rangle_m = \sum_n q_n \int d^3r' \, g(\vec{r} - \vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n(t))$$

$$= \sum_n q_n \, g(\vec{r} - \vec{r}_n) \equiv \rho_m$$

makroskopische Ladungsdichte

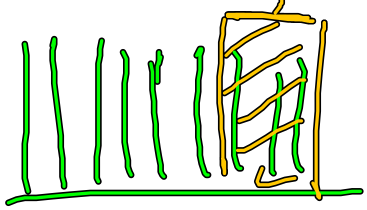


Bsp: $\rho_m(\vec{r}) = \sum_n q_n \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$ = homogene Kugel, die mit demselben Plat-

$g \sim \frac{1}{V}$

$= q \sum_n \frac{1}{V} \, \Theta(R_0 - |\vec r|)$ Ladg. q verschm. ist

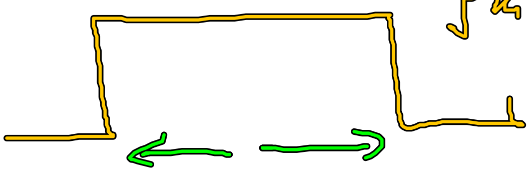
alle Ladungsmittelungsvolumen am Ort r



$\vec r$

Teilchenzahl in V

$= q \, \frac{N_V}{V} \, \Theta(R_0 - |\vec r|)$



ρ_m

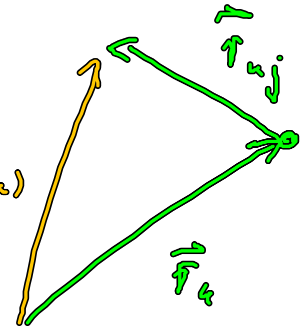
R_0

Kugelradius

$= q \, n_T \, \Theta(R_0 - |\vec r|)$

Teilchendichte in der Kugel

6.1.1.2. Gebundene Ladungen



$\vec r_{nj}$

$\vec r_{j(n)}$

$\vec r_n$

$$\langle \rho(\vec r) \rangle_{\text{gebunden}} = \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \int d^3r' \, g(\vec r - \vec r') \, \delta(\vec r' \underbrace{- \vec r_n - \vec r_{nj}}_{\vec r_{j(n)}})$$

Taylorentwicklung $|\vec r_n| \gg |\vec r_{nj}|$ innerhalb d. Moleküls,

denn $|\vec r_{nj}|$ kann maximal der Molekül ⌀ sein

0. Ordnung:

$$= \sum_n \underbrace{\sum_{j(n)} q_{j(n)}} \int d^3r' \, g(\vec r - \vec r') \, \delta(\vec r' - \vec r_n)$$

zählen die Moleküle als elektrisch neutral $\Longrightarrow 0$

weil $\sum_{j(n)} q_{j(n)} = 0$ im n-ten Molekül

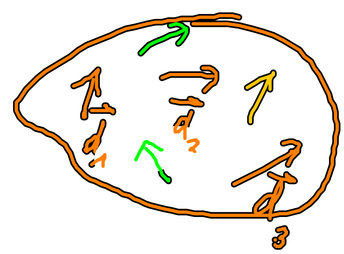
1. Ordnung $\approx \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \int d^3r'\, g(\vec r - \vec r') \cdot \left(-\vec r_{nj} \cdot \vec\nabla' \delta(\vec r' - \vec r_n) \right)$

partieller Integration

$$= \sum_n \underbrace{\sum_{j(n)} q_{j(n)} \vec r_{nj}}_{\text{Dipolmoment d. n-ten Moleküls } \vec d_n} \cdot \int d^3r'\, \vec\nabla' g(\vec r' - \vec r_n)\, \delta(\vec r' - \vec r_n)$$

$$= \sum_n \vec d_n \cdot \vec\nabla_{r_n} g(\vec r - \vec r_n)$$

$$= - \underbrace{\vec\nabla_r \cdot}_{\text{Divergenz}} \underbrace{\sum_n \vec d_n(t)\, g(\vec r - \vec r_n)}_{\text{der Dipoldichte } \vec P(\vec r, t)}$$



es wird offensichtlich durch die Mittelung eine orts- und zeitabhängige Dipoldichte eingeführt

$$\langle \rho \rangle_{geb} = - \vec\nabla \cdot \vec P(\vec r, t)$$

Dipole die ohne extern angelegt Feld existie

= „permanente" Dipole $\longrightarrow$ „Ferroelektrika"

Dipole die durch ein extern angelegtes Feld erzeugt werden

$\longrightarrow$ „Dielektrika"

Der nächste Term ist der Quadrupoltensor $\longrightarrow$ ÜA.

6.1.2. Mittelung der Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_m q_m \dot{\vec{r}}_m \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_m) + \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \dot{\vec{r}}_{j(n)} \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_{j(n)})$$

wieder freie und gebundene Ladungen getrennt.

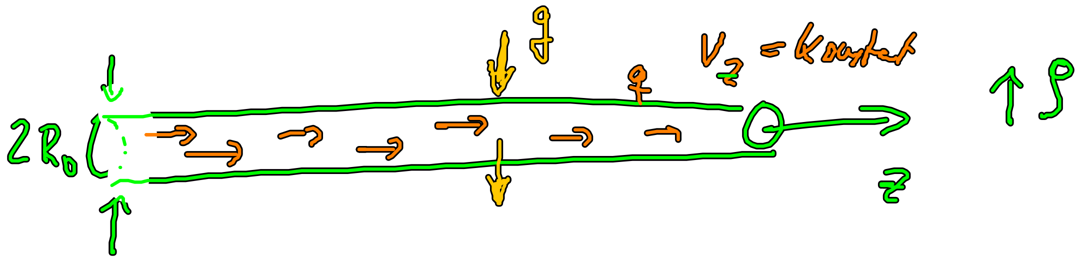
ruhend Moleküle $\dot{\vec{r}}_n$

6.1.2.1. Freie Ladungen

$$\langle \vec{j}(r) \rangle = \sum_m q_m \dot{\vec{r}}_m \, g(\vec{r} - \vec{r}_m) = \vec{J}_m \leftarrow \text{makroskop. Strom}$$

klein im Vgl. zur makroskop. Ladg.

Bsp: ∞ ausgedehnter Draht mit endlichem Querschnitt



$$\vec j_m = q v_z \vec e_z \underbrace{\sum_n g(\vec r - \vec r_n)}$$

$$= q v_z \vec e_z \frac{N_V}{V} \cdot \Theta(R_0 - |\rho|)$$

6.1.22. Gebundene Ladungen

$$\langle \vec j(r) \rangle_{gebund} = \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \Big(\underbrace{\dot{\vec r}_n(t)}_{=0 \text{ Moleküle in Ruhe}} + \dot{\vec r}_{nj}(t) \Big)$$

$$\int d^3r' \, g(\vec r - \vec r') \, \delta(\vec r' - \vec r_n - \vec r_{nj})$$

0. Ordnung

$$= \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \dot{\vec r}_{nj} \, g(\vec r - \vec r_n) = \sum_n \dot{\vec d}_n(t) \, g(\vec r - \vec r_n) = \partial_t \vec P$$

es entsteht als erster Beitrag die Zeitableitung d. Dipoldichte

1. Ordnung

$$+ \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \underbrace{\dot{\vec r}_{nj} \; \vec r_{nj} \cdot \vec\nabla_n \; g(\vec r - \vec r_n)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_{nj} \, \vec{r}_{nj} \cdot \vec{D}_n \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_{nj} \, \vec{r}_{nj} \cdot \vec{D}_n - \frac{1}{2} \vec{r}_{nj} \, \dot{\vec{r}}_{nj} \cdot \vec{D}_n}_{\vec{D} \times (\vec{r}_{nj} \times \dot{\vec{r}}_{nj}) \cdot \frac{1}{2}} \right) g$$

in 2. Ordnung taucht das Quadrupolmoment und magnetische Eigenschaft auf (Drehimpulse)

6.1.23. Alle Stromanteile (ohne Quadrupol)

$$\vec{j}(r,t) = \vec{j}_m + \partial_t \vec{P} + \frac{1}{\mu_0} \vec{D} \times \vec{M}$$

makroskop. Strom — Dipolstrom — Magnetisierungsstrom

$$M(\vec{r},t) = \sum_n \vec{T}_n(t) \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \sum_n \underbrace{\sum_{j(n)} q_{j(n)} \vec{r}_{jn}(t) \times \dot{\vec{r}}_{nj}(t)}_{\sum_{j(n)} \frac{q_{j(n)}}{m_{j(n)}} \vec{\ell}_{j(n)}} \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

damit tritt der Magnetisierungsstrom auf

Drehimpuls nicht gefühlt.

6.2. Die makroskopischen Maxwellgleichungen

mikroskopisch → makroskopisch durch „$\langle \cdot \rangle$“

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Big| \langle \quad \rangle$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_m - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_m - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right)}$$

man hat ein gemitteltes Feld und gemittelte Quellen

dielektrische Verschiebungsfeld $\vec{D}$ einführen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \vec{P}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_m}$$

$\vec{D}$ ist ein E-Feld das durch $\vec{P}$ renormiert ist.

b) $\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rangle = 0 \implies \boxed{\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0}$

c) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \langle \vec{E} \rangle = -\partial_t \langle \vec{B} \rangle}$$

formal kein Änderung.

d) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle = \mu_0 \left(j_m + \partial_t \vec{P} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) + \frac{1}{c^2} \partial_t \langle \vec{E} \rangle}$$

Einführg. der magnet. Feldstärke $\vec{H}$

$$\frac{\langle \vec{B} \rangle - \vec{M}}{\mu_0} = \vec{H}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}}$$

Durch räumliche Mittelg. erhält man die Dipol- und Magnetisierungsdichte (~ Dipole + magn. Moment (Drehimpulse)) sowie makroskop. Ladungen + Ströme.

Achtg.: die makroskopischen Maxwellgl. gelten nur auf Längenskala $\gg$ / $>$ der atomaren Skala.

(~~Röntgenstrahlen~~)