7. Materialgleichungen

in die makroskopischen Maxwellgleichungen gehen makroskopische Ladung, Strom, Dipoldichte ... ein, diese Größen müssen aus Mittlg. der Bewegungsgleichungen für Punktladungen berechnet werden:

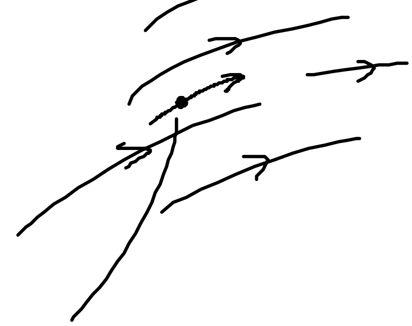
$$m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_i = q\left(\vec{E}(\vec{r}_i,t) + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i,t)\right)$$

klassisches Modellsystem: Newtongleichung mit Lorentzkraft

7.1. Makroskopische Ströme – Flüssigkeitsmodell

Elektronenflüssigkeit, Plasma ...

besteht aus 2 makroskopischen Größen:



makroskopische Ladung $\rho_m(\vec{r},t)$

Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}_m(\vec{r},t)$

$\vec{u}_m(\vec{r},t)$ beschreibt die Geschwindigkeit eines Probeteilchens am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t

Gleichungen der Elektronenflüssigkeit:

1) $\partial_t \rho_m = -\vec{\nabla}\cdot(\rho_m \vec{u}_m)$

Kontinuitätsgleichg. f. den makroskopischen Strom $\vec{j}_m = \rho_m \vec{u}_m$.

2.) $\partial_t \vec{u}_m + \vec{u}_m \cdot \vec{\nabla}\, \vec{u}_m = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{u}_m \times \vec{B}\right)$

Gleichung f. Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}_m$

erinnert an Navier-Stokes-Gleichg. f. Strömungen

<u>rechts</u>: Kräfte auf Probeteilchen (Lorentzartig)

<u>links</u>: nichtlinearer Gradiententerm

→ verantwortlich f. Turbulenz, nichtlineare Effekte

7.11. Beispiel: Ohmsches Gesetz

- kleine Geschwindigkeiten $\vec{u}_n$ $\Rightarrow$ Gradiententerm weglassen

- homogenes Plasma

ρ_n = konstant

Strom in Kondensator

- phänomenologische Dämpfung $\partial_t \vec{u}_n = -\gamma \vec{u}_n$

Verluste durch Coulomb-WW-induzierte Stöße

$$\Rightarrow \quad \partial_t \vec{u}_n = -\gamma \vec{u}_n + \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B}\right) \qquad (\vec{r}, t)$$

suche die stationäre Lösg. f. $\vec{B}, \vec{E}$, zeitlich konstant

$$\partial_t \vec{u}_n \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{u}_n = \frac{q}{m\gamma}\left(\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B}\right)$$

Strom f. Maxwellgleichg.:

$$\vec{j}_n = \frac{\rho_n q}{m\gamma}\left(\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B}\right)$$

$$\boxed{\vec{j}_n = \sigma \vec{E}, \quad \sigma = \frac{\rho_n q}{m\gamma}}$$

σ ist die Leitfähigkeit

μ muß extern berechnet werden,
ist Temperaturabhängig

7.1.2. Skizze zur Ableitung der Elektronenflüssigkeitsgleichung

mikroskop. Ladungen $\rho = \sum_n q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))$

muß gemittelt werden und Newtongleichung einbauen

mikroskop. gilt Kontinuitätsgl. $\partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$, mitteln

$\rightarrow \partial_t \rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}_m)$ ✓

Ansatz $\vec{j}_m = \rho_m \vec{u}_m$, $\vec{u}_m = ?$

zunächst auf 2 Arten $\partial_t j_i$ berechnen $\underline{\underline{(\text{ohne } m)}}$

i-te kartesische Komponente d. Stroms

1. Weg) $\partial_t (u_i \rho) = \partial_t u_i\, \rho_m + u_i\, \partial_t \rho_m$

2. Weg) $\partial_t (u_i \rho) = \partial_t j_i = \partial_t \left(\sum_n q \dot{\vec{r}}_n\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right)$

taucht $\ddot{\vec{r}}_n$ auf $\rightarrow$ Newtongleichung einsetzen taucht $\dot{\vec r}_n \, \dot{\vec r}_n$ auf $\rightarrow$ $\underbrace{\left\langle \sum_n q \, \dot r_{n_i} \, \dot r_{n_j} \, \delta(\vec r - \vec r_n) \right\rangle}$

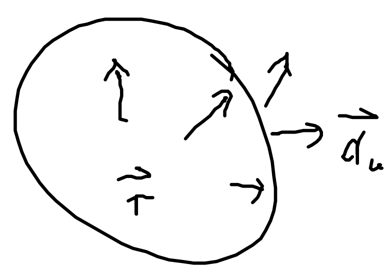
Faktorisierung, Annahme ist unabhängige Mittelung der Größen $\quad \langle \rho \rangle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$

$1 \Rightarrow 2$ Weg $\longrightarrow$ geschickt aufschreiben $\Rightarrow \partial_t \vec u_n = \underset{\text{wie oben}}{\dots}$

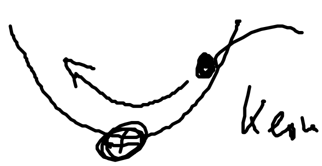
7.2. Dipoldichte

Definition der Dipoldichte: $\vec P(\vec r, t) = \sum_n \vec d_n(t) \, \underline{\underline{g}}(\vec r - \vec r_n)$

$\vec d_n(t) = ?$



einfachste Modell



Elektron

Kernpotential d. Proton parabolisch

$\hat{=}$ zeitabhängiges Dipolmoment

führt auf die Gleichung f. die Dipoldichte:

$$\ddot{\vec{P}}(\vec{r},t) + \gamma \cdot \dot{\vec{P}}(\vec{r},t) + \omega_0^2 P(\vec{r},t) = n_0 \frac{q^2}{m} \vec{E}(\vec{r},t)$$

Dämpfg. Oszillator Anzahldichte der Dipolmomente

$\sim 10^{23}/\text{cm}^3$

7. 2. 1. Beispiel: Statische dielektrische Konstante

statisch : $\partial_t^2, \partial_t \to 0$

$$\vec{P}(r,t) = \frac{n_0 q^2}{\omega_0^2 m} \vec{E}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad , \quad \chi = \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 \omega_0^2 m} \text{ ist Suszeptibilität}$$

Brechzahl $n^2 = \varepsilon$ (einfachstes Modell)

7. 2. 2. Skizze f. die Ableitg. der Dipoldichtegleichg.

alle Dipole im Raum erfüllen Oszillatorgleichung:

$$\ddot{\vec{r}}_{nj} + \omega_0^2 \vec{r}_{nj} + \gamma \dot{\vec{r}}_{nj} = \frac{q_{j(n)}}{m} (\vec{E}_n + \dot{\vec{r}}_{nj} \times \vec{B}_n)$$

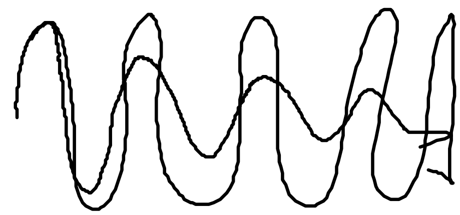
Felder am Ort

des Moleküls bzw

bei $\vec{r}_{nj}$

γ ist wieder als phänomenologische Dämpfung der Oszillation eingebaut worden, entsteht z.B. durch Ankopplung an Umgebung (Materie der Dipole) und durch Abstrahlungsverluste: ($\dddot{\vec{r}}_{nj} \simeq \omega_0^2 \dot{\vec{r}}_{nj}$

$\vec{r}_{nj} \sim e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma t}$



$\vec{d}_n = \sum_{j(n)} q_{j(n)} \vec{r}_{nj}$, und $g(\vec{r}-\vec{r}_n)$ anwenden:

$$\ddot{\vec{P}}(r,t) + \omega_0^2 \vec{P}(r,t) + \gamma \dot{\vec{P}}(r,t) = \frac{q^2}{m} \sum_n g(\vec{r}-\vec{r}_n) \vec{E}_n$$

($\vec{B}$ weggelassen wegen $\dot{r}_{nj} \ll c$, für ebene Welle)

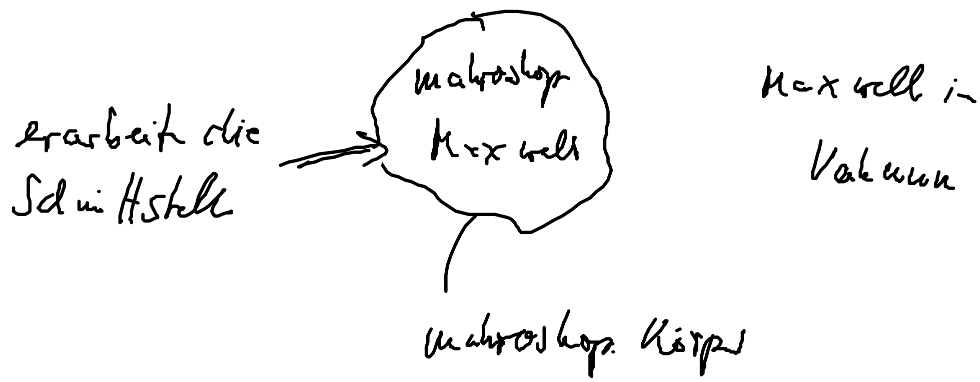
$$\sum_n g(\vec{r}-\vec{r}_n) \vec{E}_n = \frac{1}{dV} \int d^3r' g(\vec{r}-\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}')$$

↑ $n_0 \sim$ 1 Dipol / Volumenelement dV

$n_0 \sim$ Anzahl der Dipole / Volumen

⟶ führt auf die oben angegebene Gleichung

7.3. Grenzfläche und Grenzbedingungen der makroskopischen Elektrodynamik



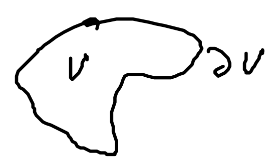
Zusammenstückeln der Theorien unklar!

7.3.1. Integraldarstellg. der makroskopischen Maxwellgl.

Formulierg in $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_m$ Volumenintegral u. Satz von Gauß $\Longrightarrow \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{D} = Q_m$

Ladg. in V

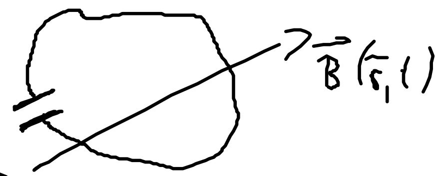


b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Longrightarrow \oint d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

c) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}$ Flächenintegral u. Satz v. Stokes $\Longrightarrow \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \int_S d\vec{A} \cdot (\vec{j}_m + \partial_t \vec{D})$

d) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \Longrightarrow \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\int_S d\vec{A} \cdot \partial_t \vec{B}$

Induktionsgesetz f. feststehende Leiterschleife



Spanng. / Potentialdifferenz messen, wenn $\partial_t \vec{B} \neq 0$

<u>Faraday-Gesetz</u>: die aufgebaute Spannung $\oint d\vec{r} \cdot \vec{E}$ ist proportional zur Ändrg. d. magnet. Flusses durch die Fläche

bisher war Leiterschleife fest, muß verallgemeinert werden.