

## 7. Materialgleichungen

in die makroskopischen Maxwellgleichungen gehen makroskopische Ladung, Strom, Dipoldichte ... ein, diese Größen müssen aus Mittlg. der Bewegungsgleichungen für Punktladungen berechnet werden:

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_L^i = q (\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t))$$

klassisches Modellsystem: Newtongleichung mit Lorentzkraft

### 7.1. Makroskopische Systeme - Flüssigkeitsmodell

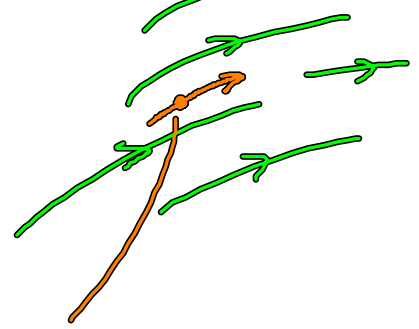
Elektronenflüssigkeit, Plasma ...



besteht aus 2 makroskopische Größen:

makroskopische Ladung  $\rho_m(\vec{r}, t)$

geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}_m(\vec{r}, t)$



$\vec{u}_m(\vec{r}, t)$  beschreibt die  
geschwindigkeit eines  
Partikels an Ort  $\vec{r}$   
zur Zeit  $t$

Gleichung der Elektrohydrodynamik:

$$1) \partial_t \rho_m = -\nabla \cdot (\rho_m \vec{u}_m)$$

Kontinuitätsgleich. f. die makroskopische Strom  $\vec{j}_m = \rho_m \vec{u}_m$ .

$$2) \partial_t \vec{u}_m + \vec{u}_m \cdot \nabla \vec{u}_m = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{u}_m \times \vec{B})$$

Gleichung f. Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}_m$

Erkenntnis als Navier-Stokes-Gleichung f. Strömungen

rechts: Kräfte auf Partikelchen (Lorentzkraft)

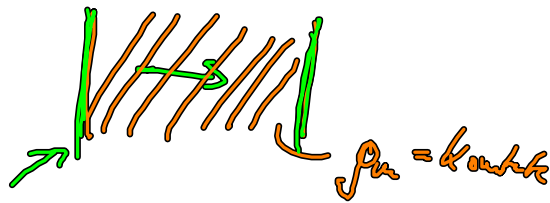
links: nichtlineare Gradiententerm

→ verantwortlich f. Turbulenz,  
nichtlineare Effekte

7.11. Beispiel: Ohmscher Festkörper

- kleine Geschwindigkeit  $\vec{u}_n \rightarrow$  Gradientenform gelöst

- homogenes Plasma



Shock in Konduktor

- phänomenologische Dämpfung  $\partial_t \vec{u}_n = -\gamma \vec{u}_n$

Verlust durch Coulomb-WW -  
induziert Stoß

$$\Rightarrow \partial_t \vec{u}_n = -\gamma \vec{u}_n + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B}) \quad (\vec{r}, t)$$

suchen die stationäre Lösung f.  $\vec{B}, \vec{E}$ , zeitlich konstant

$$\partial_t \vec{u}_n \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{u}_n = \frac{q}{m \gamma} (\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

Shock f. Maxwellgleichg.:

$$\vec{j}_n = \frac{\rho_n q}{m \gamma} (\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

$$\vec{j}_n = \sigma \vec{E}, \quad \sigma = \frac{\rho_n q}{m \gamma}$$

$\sigma$  ist die  
Leitfähigkeit

$\rho$  un $\beta$  setzen bedeutet werden,  
ist Temperaturabhängig

## 7.1.2. Skizze zur Ableitung der Elektroflussgleichung

mikroskop. Ladung  $\rho = \sum_n q \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))$

un $\rho$  gemittelt werden und Newtongleichung einbauen

mikroskop. gilt Kontinuitätsgl.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ , mit

$$\rightarrow \frac{\partial \rho_n}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_n \vec{u}_n) \quad \checkmark$$

Ausatz  $\vec{j}_n = \rho_n \vec{u}_n$ ,  $\vec{u}_n = ?$

zunächst auf 2 Arten  $\frac{\partial j_i}{\partial t}$  berechnen (ohne  $m$ )

$\uparrow$   
i-te kartesische Komponente d. Stroms

1. Weg)  $\frac{\partial (u_i \rho)}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \rho_n + u_i \frac{\partial \rho_n}{\partial t}$

2. Weg)  $\frac{\partial (u_i \rho)}{\partial t} = \frac{\partial j_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_n q \vec{r}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right)$

findet  $\ddot{\vec{r}}_n$  auf  $\rightarrow$  Newtongleichung einbauen

$$\text{fauch } \vec{r}_u \vec{r}_u \text{ auf } \rightarrow \underbrace{\left\langle \sum_u q r_{u_i} r_{u_j} \delta(\vec{r} - \vec{r}_u) \right\rangle}$$

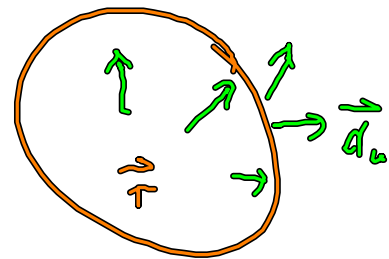
Faktisierung, Annahme ist  $\langle \rho \rangle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$   
 unabhängige Mittelw. der Größen

$1 \Rightarrow \text{Weg} \rightarrow$  geschl. aufschreiben  $\Rightarrow \partial_t \vec{u}_u = \dots$   
 wieder

## 7.2. Dipoldichte

Definit. der Dipoldichte  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_u \vec{d}_u(t) \rho(\vec{r} - \vec{r}_u)$

$\vec{d}_u(t) = ?$



einfachste Modell



$\hat{=}$  zeitabhängiger Dipolmoment

führt auf die folgf. f. die Dipoldichte:

$$\ddot{\vec{p}}(\vec{r}, t) + \gamma \dot{\vec{p}}(\vec{r}, t) + \omega_0^2 \vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{\omega} \vec{q}^2 \vec{E}(\vec{r}, t)$$

↑  
Dämpfz.
↑  
Oszillator
↑  
Ausladungsdichte & Dipol-  
momente

$\sim 10^{23} / \text{cm}^3$

### 7.2.1. Beispiel: Statistisch dielektrische Konstante

statisch:  $\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow 0$

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi f^2}{\omega_0^2 \omega} \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$\epsilon = 1 + \chi$ ,  $\chi = \frac{4\pi f^2}{\epsilon_0 \omega_0^2 \omega}$  ist Suszeptibilität

Brechzahl  $n^2 = \epsilon$  (einfachste Modell)

### 7.2.2. Skizze f. die Ableitg. der Dipoldichte gleichg.

alle Dipole in Raum erfüllen Oszillatorgleichung:

$$\ddot{\vec{r}}_{uj} + \omega_0^2 \vec{r}_{uj} + \gamma \dot{\vec{r}}_{uj} = \frac{q_j e_j}{m} (\vec{E}_e + \dot{\vec{r}}_{uj} \times \vec{B}_e)$$

↑  
Felds am Ort

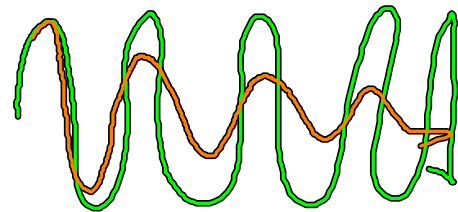
des Moleküls bzw

bzw  $\vec{r}_{ij}$

$\mu$  ist nicht als phänomenologische Dämpfung der Oszillation eingeleitet worden, entsteht z.B. durch Ankopplung an Umgebung (Matrix der Dipole) und durch Abschleichenverluste:

$$\ddot{\vec{r}}_{ij} \approx \omega_0^2 \dot{\vec{r}}_{ij}$$

$$\vec{r}_{ij} \sim e^{i\omega_0 t - \gamma t}$$



$$\vec{d}_n = \sum_{j(n)} q_j(n) \vec{r}_{ij}, \text{ und } g(\vec{r}-\vec{r}_n) \text{ anwende:}$$

$$\ddot{\vec{P}}(\vec{r}, t) + \omega_0^2 \vec{P}(\vec{r}, t) + \gamma \dot{\vec{P}}(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{\epsilon_0} \sum_n g(\vec{r}-\vec{r}_n) \vec{E}_n$$

( $\vec{B}$  vernachlässigt wegen  $\dot{\vec{r}}_{ij} \ll c$ ,  $\gamma$  durch Verluste)

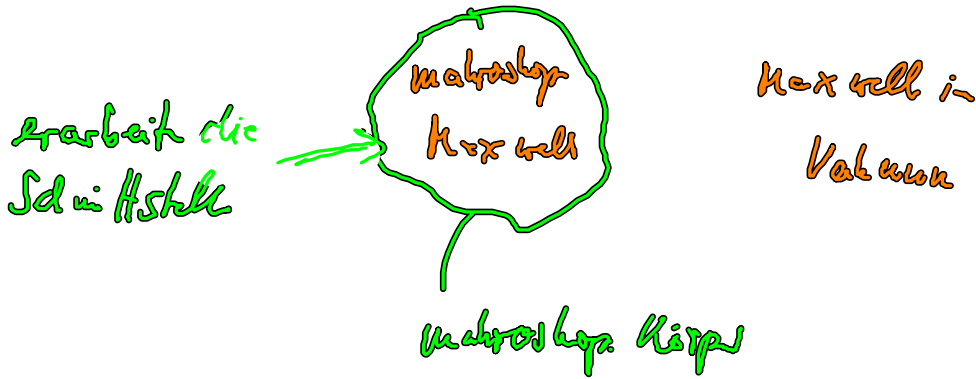
$$\sum_n g(\vec{r}-\vec{r}_n) \vec{E}_n = \frac{1}{dV} \int d^3r' g(\vec{r}-\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}')$$

$\uparrow$   
 $n_0 \sim 1 \text{ Dipol / Volumenabsicht } dV$

$n_0 \sim \text{Anzahl der Dipole / Volumen}$

$\rightarrow$  führt auf die oben angegebenen Gleichung

# 7.3. Grenzfläche und Grenzbedingungen der makroskopische Elektrodynamik



Zusammenstücke der Theorien unklar!

## 7.3.1. Integraldarstellung der makroskopischen Maxwellgl.

Formulierung in  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$

a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_m$  Volumenintegral u. Satz von Gauß  $\rightarrow \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{D} = Q_m$



↑ Ladg. in V

b)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \int d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

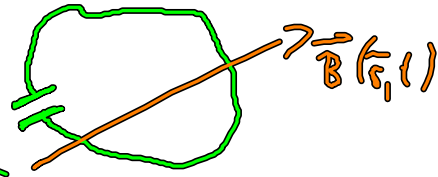
c)  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}$  Flächenintegral u. Satz v. Stokes  $\rightarrow \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \int_S d\vec{A} \cdot (\vec{j}_m + \partial_t \vec{D})$





$$d) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \implies \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = - \int_S d\vec{A} \cdot \partial_t \vec{B}$$

Induktion gesetz f. feststehend leitend



Spann. / Potentialdifferenz  
messen, wenn  $\partial_t \vec{B} \neq 0$

Faraday-Gesetz: die aufgebogene Spannung  $\oint d\vec{r} \cdot \vec{E}$  ist  
proportional zur Ändg. d. magnet.  
Flusses durch die Fläche

bisher war Leitend fest, muß verallgemeinert werden.