

## Faraday - Gesetz:

Induzierte elektromagnetische Kraft (Spannung) ist negativ proportional der Zeitabk. d. magnetischen

Flusses  $\Phi_m$ :



$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)}_{\Phi_m}$$

experimentell: auch  $\neq 0$ , wenn  $S = S(t)$

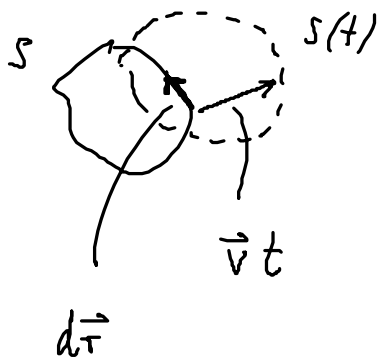
Verallgemeinerung für  $S = S(t)$

$$\begin{aligned} \oint d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) + \frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \\ &= - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)}_{\Phi_m(t)} \end{aligned}$$

enthält Anteile  
der zeitlich veränderliche

Fläche  $S(t)$  und  $\vec{B}(r, t)$

Änderg. der Fläche in  $(0, t)$



$$d\vec{A} \approx \vec{v}t \times d\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \approx \vec{v} \times d\vec{r}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \oint \vec{v} \times d\vec{r} \cdot \vec{B}(r)$$

Spatprodukt

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = - \frac{d}{dt} \phi_m + \oint d\vec{r} \cdot (\vec{B} \times \vec{v})$$

$$\oint d\vec{r} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = - \frac{d}{dt} \phi_m$$

elektromagnetische Kraft in der bewegten Pralteschleife  $\partial S$ ,  
diese Gesamtkraft bewirkt nun die Ladungsbewegung +

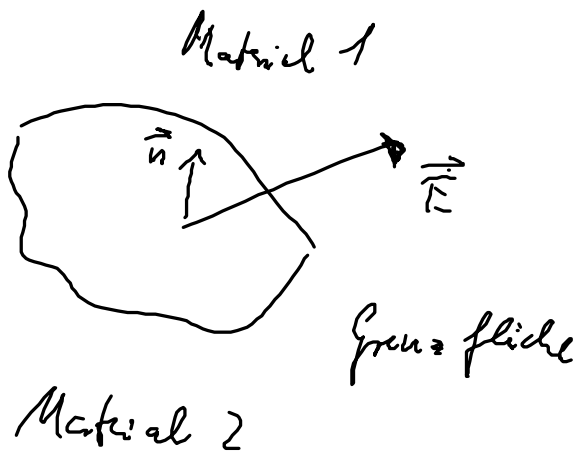
Spannungsabfall:

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{E}' = - \frac{d}{dt} \phi_m$$

Die Aufteilg. d.  $\vec{E}, \vec{D}$ -Felds hängt von Beobachter ab,  
 die Elektronen in DS spüren sieht effektiv  $\vec{E}'$ .  
 (Ableitg. bezieht sich auf  $\vec{v} = \text{zeitl. konstant.}$ )

### 7.3.2. Stetigkeitsbedingungen

(„Randbedingungen“,  
 „Übergangsbedingungen“)

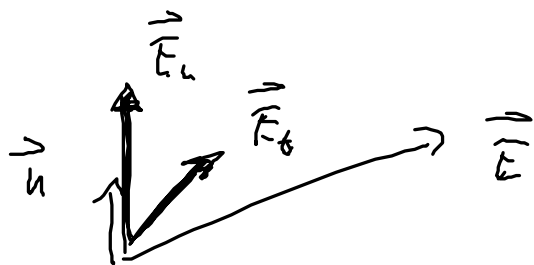


das Verhalten des Felds an der  
 Grenzfläche wird benötigt,  
 um gekoppelt gefundene Lösungen  
 „aneinander zu stecken“.

$\vec{n}$  Normalenvektor an die Fläche

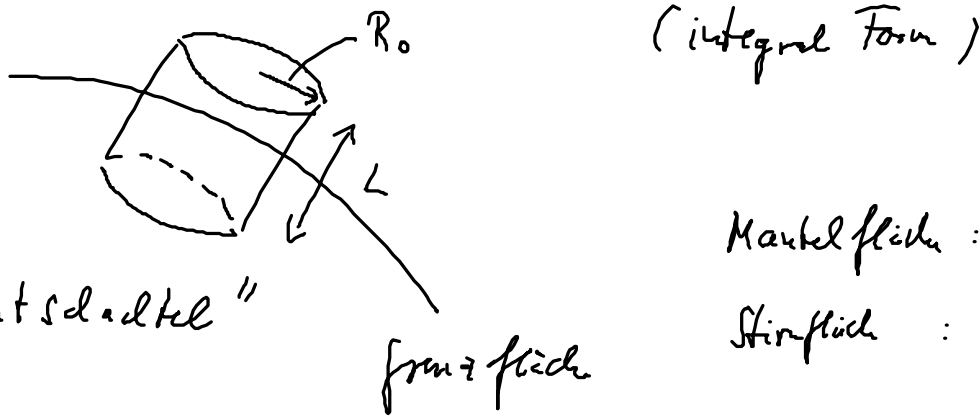
2 Vektoren sind interessant: Normalkomponente  $\vec{E}_n = \vec{n} (\vec{E} \cdot \vec{n})$

Tangentenkomponente  $\vec{E}_t = \vec{n} \times \vec{E}$



liegt in der Ebene

Divergenzgleichungen führen auf Stetigkeitsbedingungen für  $\vec{D}, \vec{E}$ :



(Integral Form)

Mantelfläche:  $\Delta M$

Stirnfläche:  $\Delta A$

a)  $\oint d\vec{A} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \int d^3r \rho(\vec{r})$  über die Hutschale  
 $L \rightarrow 0$

(i) wenn  $\rho(\vec{r})$  nicht  $\infty$  wird, kann man Mittelwertsatz verwenden

$$\Delta M \bar{D}_z + (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{u} \Delta A = \Delta A L \bar{\rho}$$

(Mittelwerte:  $\bar{x}$ )

$$0 + (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{u} \Delta A = 0$$

$\uparrow$   
 $L \rightarrow 0$

Die Normalkomponente des  $\vec{D}$  Felds ist stetig wenn für  $\rho$ -Integral der Mittelwertsatz gilt  $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{u} = 0, D_{n1} = D_{n2}$ .

(ii) In idealen Metallen kann der Mittelwertsatz nicht verwendet werden ideale Metall  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$   
 $\sigma_L \rightarrow \infty$  guter Leiter  $\Rightarrow \vec{E} = 0$  im Metall  
 führt oft zu Anhäufungen v. Ladungen in einer kleinen

grenzschicht. F. Felder gilt der Mittelwertsatz  
immer.

$$\rightarrow \text{für } \int d^3\rho = \Delta Q$$

$\uparrow$   
 $L \rightarrow 0$

$$\rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \Delta A = \Delta Q$$

Oberflächenladungsdichte

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \rightarrow \sigma \hat{=} \text{endlich}$$

$\downarrow$

Die Normalkomponente des  $\vec{D}$ -Feldes springt an einer Grenzfläche um die Oberflächenladung.

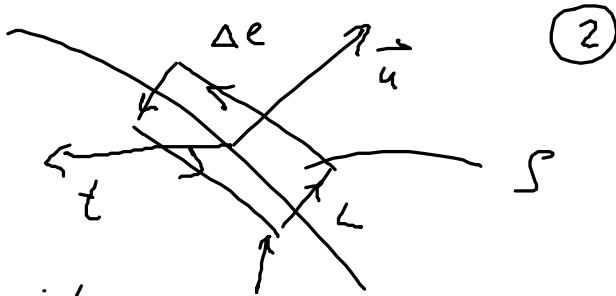
Für reale Materialmodelle ist  $\sigma \text{ i.e. } = 0$ .

b)  $\int d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$  Die Normalkomponente des  $\vec{B}$ -Feldes ist an einer Grenzfläche stetig  $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$ .

Rotationsgleichungen

①

Linie integral  $\partial S$



②

$$c) \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = - \int_S d\vec{A} \cdot \partial_t \vec{B}, \text{ nach Mittelwertsatz}$$

Umlauf::

$$\perp + \parallel = 0$$

Zu Grenzfl. zu Grenzfläche  $L \rightarrow 0$

$\parallel$

$\parallel$

0

$$\vec{E}_2 \cdot \Delta e (\vec{t} \times \vec{u}) - \vec{E}_1 \cdot \Delta e (\vec{t} \times \vec{u}) = 0$$

nach Mittelw.

$$\vec{t} \cdot (\vec{u} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)) = 0$$



kann auf Grenzfläche

$\Rightarrow$

$$\vec{u} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

beliebig gelegt werden

Die Tangentialkomponente (in Ebene) des  $E$ -Felds ist stetig.

$$d) \oint d\vec{r} \cdot \vec{H} = \int d\vec{A} \cdot (\vec{j}_m + \partial_t \vec{D})$$

$$\underbrace{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{t} \times \vec{u}) \Delta l}_{\text{andg (c): E-Feld}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn Mittelwertwert f. } \vec{j}_{\text{m}} \text{ gilt} \\ \Delta l \frac{\Delta I_m}{\Delta l}, & \text{wenn man Integral auswertet und} \\ & \Delta l \text{ schon durch die Fläche } S \end{cases}$$

Linie Stromdichte

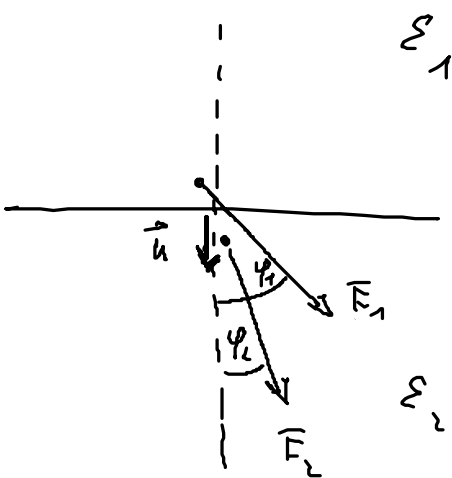


$$\vec{t} \cdot (\vec{u} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)) = \frac{\Delta I_m}{\Delta l} = \vec{t} \cdot \vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{u} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}$$

Die Tangentialkomponente v.  $\vec{H}$  ist stetig, bzw springt um eine Linie Stromdichte  $\vec{k}$ .

### 7.3.3. Beispiel: Brechung v. Feldlinie in Dielektrikum



$$1) \vec{u} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0$$

$$\vec{u} \cdot (\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) = 0$$

$$\cos \varphi_1 \epsilon_1 E_1 = \cos \varphi_2 \epsilon_2 E_2$$

$$2) \vec{u} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\sin \varphi_1 E_1 = \sin \varphi_2 E_2$$

$$(1 \leftrightarrow 2) \Rightarrow \frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

klein  $\epsilon$   $\varphi_1 \approx \varphi_2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

Die Winkel die die Felds einnehmen zur Normalen sind unterschiedlich, im Verhältnis  $\epsilon_1 / \epsilon_2$ .

Die Feldlinien werden beim Übergang dicht  $\rightarrow$  dünn ( $\epsilon_1 > \epsilon_2$ )  
 zum Lot hin gebrochen  $\rightarrow \varphi_2 < \varphi_1$

### 7.3.4 Method zur Behandlung v. Randbedingg.

Überblick - Vertiefg. im Tutorium und ÜA.

#### 7.3.4.1. Orthogonale Funktionen

oft stückweise konstante Medien:  $\epsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$  ist in dem gewisse Raum bereich örtlich konstant

in dem Raum bereich:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  in Dielektrikum

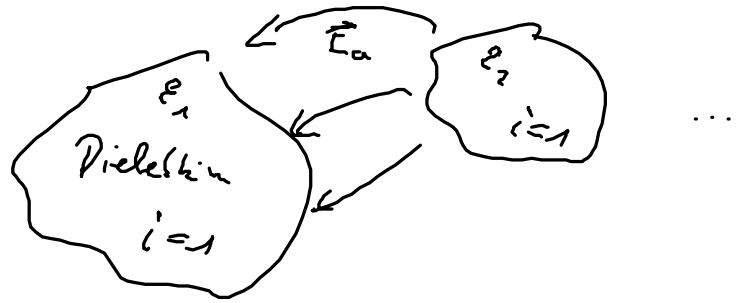


$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_i \vec{E}) = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0$$

↑  
"i"-te Raumteil

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

ideales Metall



In jedem Bereich gilt  $\Delta \phi_i = 0$ ,  
 muß aber ein Feld zugeführt werden  
 die Randbedingungen angepasst werden

ideales Metall:

bei  $\sigma_L \rightarrow \infty$

$$\rightarrow \vec{E}_L \text{ (im Leiter)} = 0$$

$$\vec{u} \times (\vec{E}_a - \vec{E}_L) = 0$$

= 0

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \times \vec{E}_a = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{D}_a = \sigma \end{array}} \Rightarrow$$

Dichtebil.:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \times (\vec{E}_i - \vec{E}_a) = 0 \text{ usw.} \\ \vec{K}_i \cdot \vec{n} = 0 \end{array}}$$



Man löst  $\Delta \phi = 0$  indem  
 man  $\phi$  nach ihm Satz  
 orthogonale Funktionen entwickelt  
 und dann die Koeffizienten über  
 RTB anpaßt

$$\phi = \sum_n a_n f_n(\vec{r})$$

$\Delta f_n(r) = 0$  löst Laplacegleichg.

$a_n$  sind die zu bestimmend Koeffizienten

die in jedem Medium verschieden sein können ( $a_n^1, a_n^2, \dots$ )

Bsp. für die  $f_n$  ist die Lösung von  $\phi$  nach Kugelkoordinaten:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$a_{lm}, b_{lm}$  sind durch  $\mathbb{R}^D$  zu bestimmen.

Bsp. ist ein dielektrischer Kugel im homogen elektr. Feld:



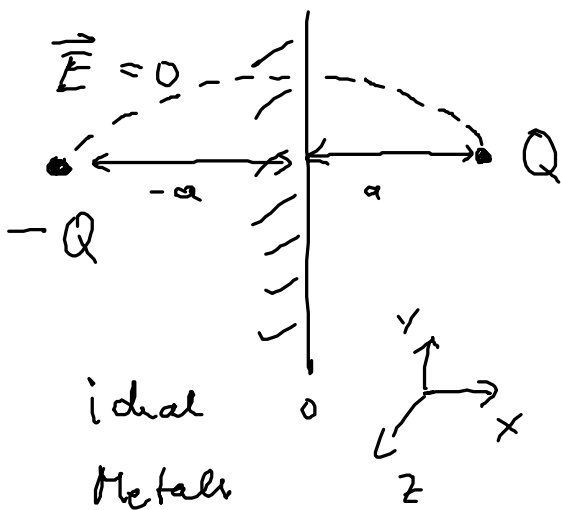
Wie wird das Feld durch die Kugel gestört? ÜA Blatt 8

## 7.3.4.2 Methode der Spiegelladung

oft kann man „fiktive“ Ladungen in Problem einführen,  
um die Randbedingungen zu erfüllen:

„Methode der fiktiven (Spiegel-) Ladungen“.

Bsp Punktladung vor idealem Metall



$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \phi_{kon}$$

inhomogen Lsg. der  
Poissongl.

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1 Punktladung.

homogen Lsg.

- soll RB  
erfüllen

und  $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$   
nicht stören

Die fiktive Ladung stört nicht die Poissongl. im rechten Halbraum  
dort gibt es nur die  $Q$ -Ladung die zu  $\rho$  beiträgt.

Aber die fiktive Ladung sorgt für  $\phi = 0$  auf der Rand:

$$\phi = \phi_{inh.} + \phi_{konst.} \text{ auf der rechten Seite:}$$

$$\phi^{\text{rdB}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\phi(x=0) = 0 \quad \forall y, z \text{ in der Ebene}$$

Dann  $\forall$  RB erfüllt die Randbedingung, daß

in  $y, z$  Ebene keine verschlossene Kluft existiert.

$$G = \oint d\vec{S} \cdot \vec{E} \neq 0.$$

