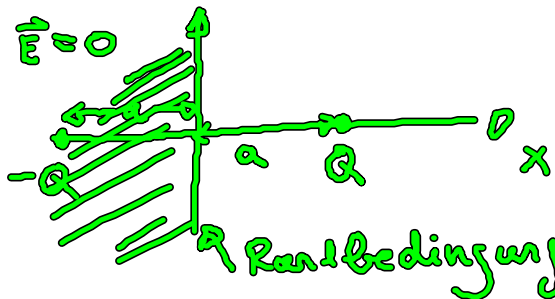


Fortführung von 7.3.4.2 Methode der Spiegelladungen

Bsp.: Punktladung vor idealem Metall



$$\phi(x=0, y, z) = \text{const} = 0$$

d.h. Äquipotentialfläche

\vec{E} muß senkrecht darauf stehen

$$\text{wegen } \vec{E} = -\nabla\phi \quad [\vec{E}_t = 0, \vec{E}_n \neq 0]$$

Rechts ist die Poissongl. erfüllt

$$\Delta \varphi^{\text{recht}} = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x)$$

allg. Lösung: $\varphi = \varphi_{\text{hom}} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}$

Einführen einer fiktiven Ladung, um Randwertproblem zu lösen.

$$\rho(r) + \text{RB} = 0 \quad \rho(r) + \text{Bildladung} \quad (\text{ohne RB})$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r} - a\vec{e}_x}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|^3} - \frac{\vec{r} + a\vec{e}_x}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|^3} \right]$$

$$\vec{E}(x=0, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y\vec{e}_y + z\vec{e}_z - a\vec{e}_x}{(y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{y\vec{e}_y + z\vec{e}_z + a\vec{e}_x}{(y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \right]$$

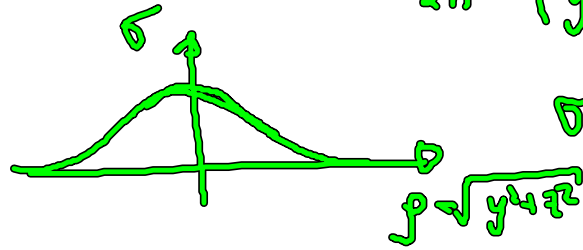
$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a\vec{e}_x}{(y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}}$$

\Rightarrow das E-Feld hat nun eine Normalkomponente $\vec{E}_n \sim \vec{e}_x$

Stetigkeitsbedingung an Grenzflächen $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

in unserem Fall $E_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \sigma = |\vec{E}_n| \epsilon_0 = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{a}{(y^2+z^2+a^2)^{3/2}}$$



σ : Flächeladungsdichte

lokalisierbare Oberflächenladungen (Luftmantelladungen)

↗
Kraft des Punktladungsfelds auf
Ladungsträger im Metall
[$E_t = 0$]

8. Strahlung zeitlich veränderlicher Quellen

Erzeugung elektromagnetischer Wellen durch zeitabhängige
Ladungsverteilungen und Stromverteilungen

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\omega} \rho_{\omega} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\omega} \vec{j}_{\omega} e^{-i\omega t}$$

↗ Fourier-Zerlegung
nach Frequenzen

ges.: $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$

Linearität der Maxwell-Gl. \rightarrow eine Fourier-Komponente
ausreichend

Ansatz der Quellen ist das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$
ausreichend, um \vec{E} und \vec{B} zu bestimmen

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \partial_t \vec{E} = c^2 \nabla \times \vec{B} \\ = c^2 \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

Lösung der Potentialgleichung (Kapitel 4)

$$\vec{A}(\vec{r}|t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Retardiertes Zeitargument \rightarrow kausales Verhalten

$$\vec{A}(\vec{r}|t) = \sum_{\omega} \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}$$

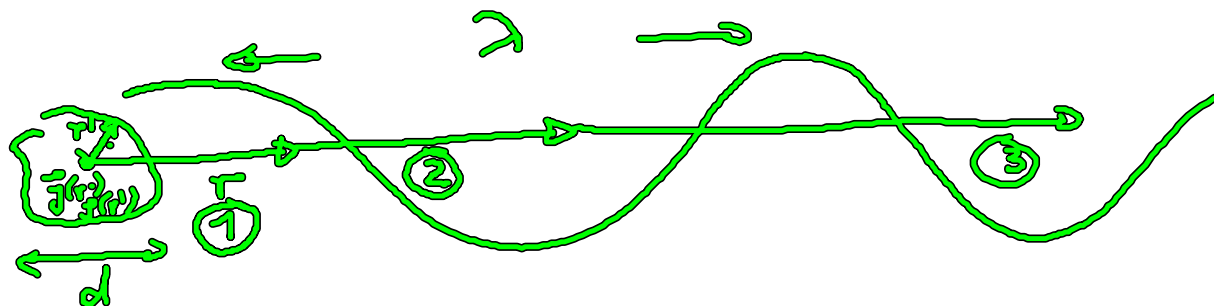
$$\Rightarrow \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{mit } \frac{\omega}{c} = k$$

nicht direkt integrierbar, i. A. Näherungen notwendig

8.1 Qualitative Diskussion kleiner Quellen

Annahme: Ausdehnung der Quelle d sei klein gegenüber der Wellenlänge λ der em. Strahlung

$$d \ll \lambda, r$$



3 Grenzfälle:

- ① Nahzone: $d \ll r \ll \lambda$ (statische Zone)
- ② intermediäre Zone: $d \ll r \sim \lambda$ ← schwierig zu behandeln
- ③ Fernzone: $d \ll \underline{\underline{\lambda}} \ll r$ (Strahlungszone)

→ ① Nahzone

$$k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{2\pi}{\lambda} |\vec{r} - \vec{r}'| \ll 1$$

$$\Rightarrow e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx 1$$

$$\Rightarrow \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

entspricht dem Vektorpotential aus der Magnetostatik
d.h. die Entfernung von der Quelle ist so klein, dass
Laufzeiteffekte keine Rolle spielen

③ Fernzone

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \int d^3r' \frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-i\omega t}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \underbrace{\int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}')}_{\text{Konstante, da unabh. von } r \text{ und } t}$$

$d \sim r' \ll r$ auslaufende Kugelwelle

8.2 Multipolstrahlung für kleine Quellen

einzigste Voraussetzung: kleine Quellen, d.h. $d \ll \lambda, r$
 λ/r beliebiges Verhältnis

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}$$

$$\approx r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}$$

Das entstehende Feld ist i. A. nicht mehr kugelsymmetrisch infolge der Winkelabhängigkeit $\chi(\vec{r}, \vec{r}')$

Nun Reihenentwicklung von $e^{ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}$. Reihe kann abgebrochen werden, da Näherung kleine Quellen, d.h. $\frac{r'}{\lambda} \ll 1$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}')^k}{k!}$$

Multipolentwicklung vom Strahlungsfeld
(Entwicklung nach $\frac{r'}{\lambda}$)

Der 1. Term wird einer Dipolverteilung entsprechen.

8.3 Strahlungsfelder im Fernfeld beliebiger Quellen

Fernfeld: $d \sim r' \ll r$

bel. Quellen: $d \sim \lambda$ (z.B. bei Antennen)

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{-ikr' \cos\theta} \quad \theta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_\omega(\vec{r}) &= -\nabla \phi_\omega + i\omega \vec{A}_\omega \\ &= i \frac{c^2}{\omega} \nabla \nabla \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}) + i\omega \vec{A}_\omega(\vec{r}) \end{aligned}$$

Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \vec{A}_\omega = i \frac{\omega}{c^2} \phi_\omega$$

Nabla in Kugelkoordinaten

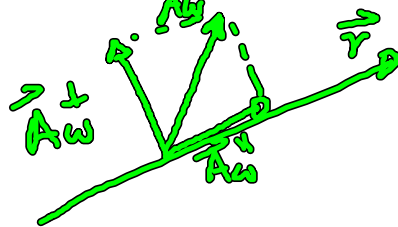
$$\nabla = \left(\partial_r, \frac{1}{r} \partial_\theta, \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi \right) \approx \vec{e}_r \partial_r$$

= $\underbrace{\quad}_{\text{verschwindet im Fernfeld}}$ $\underbrace{\quad}_{\text{Fernfeld}}$

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = i \frac{c}{k} \underbrace{(ik)^2 \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}))}_{\nabla \nabla \cdot \vec{A}} + i\omega \vec{A}_\omega(\vec{r})$$

$$= -i\omega \left[\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{A}_\omega) - \vec{A}_\omega \right] \equiv i\omega \vec{A}_\omega^\perp$$

$$\text{mit } \vec{A}_\omega^\perp = \vec{A}_\omega - \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{A}_\omega(r)) = \vec{A}_\omega - \vec{A}_\omega^\parallel$$



\vec{A}_ω^\perp ist der Anteil des Vektorpotentials senkrecht zu Ausbreitungsrichtung.

$$\Rightarrow \vec{E}_\omega = i\omega \vec{A}_\omega = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{-ikr' + i\omega t}$$

Damit ist das E-Feld eines bel. Quells im Fernfeld bestimmt.

8.4. Grenzfall zu statischen Feldern

Auswertung der Felder für $\omega \rightarrow 0$ (keine Zeitabh.)

$$e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = i \frac{c^2}{\omega} \nabla \nabla \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}) + i\omega \vec{A}_\omega(\vec{r})$$

problematisch, da singular für $\omega \rightarrow 0$

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = i \frac{c^2}{\omega} \nabla \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}') (-\nabla') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$$

$$= i \frac{c^2}{\omega} \nabla \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{i\omega j_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \nabla' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}') \quad \text{partielle Integration}$$

$$= - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{j_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{Kontinuitäts-} \\ \text{gl. } - j_\omega = i\omega \rho_\omega$$

$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\phi(\vec{r})$$

\rightarrow Elektrostatik als Grenzfall

8.5. Strahlungsfeld des elektrischen Dipols

7. Term der Multipolentwicklung (aus Abschnitt 8.2)

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}') \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}')^n}{n!}}_{=1}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{r}' \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}')}_{=1}$$

Kontinuitätsgl.

$$i\omega \rho_\omega$$

Nebenrechnung:

$$\nabla \cdot (x' \vec{j}) = x' \nabla \cdot \vec{j} + \underbrace{\vec{j} \cdot \nabla x'}_{\frac{\partial j_x}{\partial x}}$$

$$\vec{j} = -\vec{r}' \nabla \cdot \vec{j}$$

$$\text{da } \int d^3r' \nabla \cdot (x' \vec{j}(\vec{r}'))$$

$$= \oint d\vec{A} \times \vec{j}(\vec{r}') = 0$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} i\omega \underbrace{\int d^3r' \vec{r}' j_\omega(\vec{r}')}_{\vec{d}_\omega}$$

Dipolmoment der
Ladungsverteilung ρ_ω

Die zeitliche Oszillation eines Dipolmoments ($\sim e^{-i\omega t}$)
führt zur Erzeugung einer Strahlung

Im Fernfeld gilt (Abschnitt 8.3)

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = i\omega \vec{A}_\omega^\perp = -i\omega [\vec{e}_r \cdot (\vec{e}_r \cdot \vec{A}_\omega) - \vec{A}_\omega]$$

$$= - \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{d}_\omega) - \vec{d}_\omega \right]$$

Zeitraum:




$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \omega^2 \vec{d}_\omega \frac{e^{i\omega(\frac{r}{c} - t)}}{r}$$

$$= - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} d^\perp(t - \frac{r}{c})$$

$(-i\omega)^2 = -\omega^2$

⇒ Das elektrische Feld eines zeitabhängigen Dipols am Ort $r=0$ \sim Beschleunigung des Dipols.

Veranschaulichung des oszillierenden Dipols

$t=0$	\pm	2 Ladungen sitzen aufeinander
$t = \frac{T}{4}$	\pm 	Bewegung in entgegengesetzter Richtung
$t = \frac{T}{2}$	\mp 	Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$
$t = \frac{3}{4}T$	\mp 	Laufzeit $t - \frac{r}{c}$ führt zu Verzögerung und Ausstrahlung mit c
$t = T$	\pm 