Organisatorisches: ① DO-Tutorium (wegen Streik ausgefallen)

$\to$ Treffen nach der VL im EW 710

(sonst in die Sprechstunde kommen)

weiter zu <u>8.5. Strahlungsfeld des elektrischen Dipols</u>

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i\omega \underline{\underline{\vec{A}^{\perp}(r,t)}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \omega^2 d_{\omega}^{\perp} \frac{e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)}}{r}$$

Der Energiestrom ins Vakuum läßt sich über den Poynting-Vektor bestimmen

$$\vec{S}_{\omega} = \vec{E}_{\omega} \times \vec{H}_{\omega}$$

$$\vec{E}_{\omega} = -\underbrace{\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi}}_{\frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\underbrace{\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{d}_{\omega}) - \vec{d}_{\omega}}_{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{d}_{\omega})} \right]$$

bac-cab

$$\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{d}_{\omega}) = \vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{d}_{\omega}) - \vec{d}_{\omega}\underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)}_{=1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} k^2 (\vec{e}_r \times \vec{d}_{\omega}) \times \vec{e}_r \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_\omega = \frac{1}{i\omega\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{E}_\omega$$

$\nabla\times E = -\dot{B}$

$$= \frac{1}{i\omega\mu_0 4\pi\varepsilon_0}\; ik\vec{e}_r\times k^2\left[(\vec{e}_r\times\vec{d}_\omega)\times\vec{e}_r\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$\omega = ck$

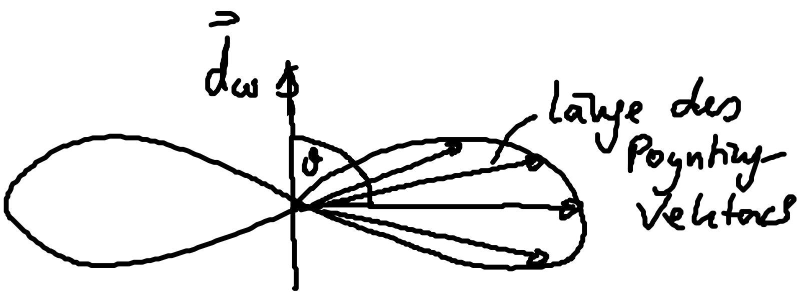
$$= \frac{ck^2}{4\pi}\left(\vec{e}_r\times\vec{d}_\omega\right)\frac{e^{ikr}}{r}$$

Poynting-Vektor

$$\vec{S}_\omega = \vec{E}_\omega\times\vec{H}_\omega \sim \left[\vec{e}_r\times\vec{d}_\omega\right]\times\left[(\vec{e}_r\times\vec{d}_\omega)\times\vec{e}_r\right]$$

$$= \left(\vec{e}_r\times\vec{d}_\omega\right)^2\vec{e}_r = d_\omega^2\sin^2\theta\,\vec{e}_r$$

Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{e}_r$ ≙ Ausbreitungsrichtung

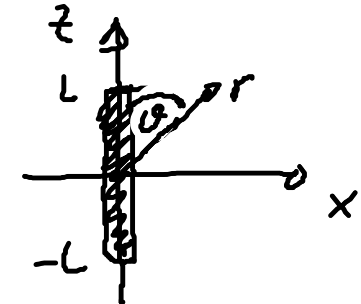


Die abgestrahlte Energie eines Dipols wird max. in Richtung senkrecht zu seiner Orientierung ($\sin\theta = 1$) und verschwindet in seiner Richtung

$(\sin\theta = 0)$.

→ Weiteres Beispiel zur Ausstrahlung von elektromagnetischen Wellen: lineare Antenne (genauer als Übungsaufgabe)

$$\vec{j}_\omega(\vec{r}) = \overset{\text{Strom}}{I_\omega(z)}\,\delta(x)\,\delta(y)$$

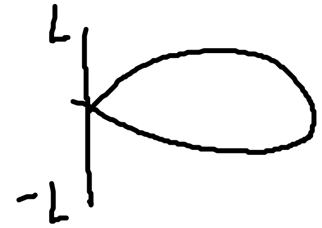


$$|E_\omega|^2 \sim \frac{\tan^2\theta}{r^2}\sin^2(k\underline{L}\cos\theta)$$

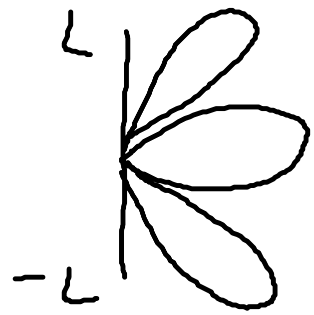
starke Abhängigkeit der Abstrahlungscharakteristik von der Länge der Antenne

$L = m\lambda$

$m = 1$



$m = 2$



Im Grenzfall $kL \to 0$ erhält man wieder die Abstrahlungscharakteristik eines Dipols

$\sim \sin^2\theta$

9. Ausbreitung ebener Wellen in Materie

Absorption von Wellen → Lambert-Beer Gesetz

Brechung und Reflexion → Winkelverhältnisse (Reflexions- und Brechungsgesetz)

Intensitätsverhältnisse

(Fresnel-Gleichungen)

Maxwell-Gleichung haben fortschreitende Wellen als Lösung, d.h. Energietransport von einem Punkt zum nächsten.

An Grenzflächen können sie reflektiert und transmittiert (Brechung, Absorption) werden.

Ausgangspunkt: Wellengleichung im Medium

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{j}} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

ges.: $$\Box \vec{E} = (\underbrace{\Delta}_{\nabla\nabla\cdot \, - \nabla\times\nabla\times} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2) \vec{E}$$

$E \perp$ zur Ausbreitungsrichtung

Betrachten ebene Wellen: $E = f(z)\, \vec{e}_x$

hier verschwindet die Divergenz des elektr. Felds, d.h.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Box \vec{E} = -\nabla \times \underline{\nabla \times \vec{E}} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E}$$

$$= \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E}$$

$$= \mu_0 \partial_t \vec{j}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_M + \partial_t \vec{P} + \nabla \times \vec{M}$$

makroskop Strom hervorgerufen durch freie Ladungen

Dipoldichte → gebundene Elektronen im Molekül

Magnetisierung

Im folgenden betrachten wir Ausbreitung ebener Wellen in z-Richtungen innerhalb eines Dielektrikums

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) E(z,t) = \mu_0 \partial_t^2 P(z,t)$$

In linearen Medien: $P_\omega = \varepsilon_0 \chi(\omega) E_\omega$

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) E(z,t) = -\mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 \chi(\omega) E_\omega$$

Einführung der Brechzahl $n(\omega)$, so daß

$$\left[\partial_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)\right] E_\omega = 0 \qquad \Big| \ \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

mit $n^2(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ ← diese beinhaltet die Eigenschaft des Mediums

$\chi(\omega)$ setzt sich aus allen optischen Übergängen in der Materie zusammen

$$\chi = \chi_{nr} + \chi_r$$

nichtresonanter Beitrag

resonanter Beitrag

Übergangsfrequenz ≙ Anregungsfrequenz

Lösung der Wellengleichung

Ansatz: $E_\omega = E_\omega^0 \, e^{i \frac{\omega}{c} n(\omega) z}$

$$n(\omega) = \sqrt{1+\chi(\omega)} = \sqrt{1+\chi_{nr}+\chi_r} \approx \sqrt{1+\chi_{nr}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\chi_r}{1+\chi_{nr}}\right)$$

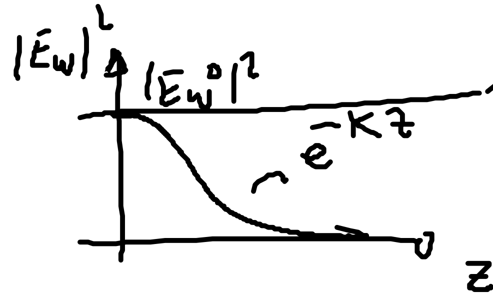
$$= n_{nr} + \frac{1}{2}\frac{\chi_{nr}}{n_{nr}}$$

nichtresonante Effekte sind oft dominant, d.h. χ_r klein

Intensität

$|E_\omega|^2 = |E_\omega^0|^2 e^{-\kappa z}$ mit $\kappa = \frac{\omega}{c}\frac{1}{n_{nr}}\boxed{\mathrm{Im}\,\chi_r}$!

nur der Imaginärteil trägt zur Absorption bei



falls $\chi \in \mathbb{R}$ keine Absorption

κ ≙ inverse Absorptionslänge

Lambert-Beer Gesetz:

exponentieller Abfall der Intensität durch Absorption im Medium

Allein der Imaginärteil von $\chi(\omega)$ trägt zur Absorption bei.

9.1. Suszeptibilität $\chi(\omega)$

A) Dielektrikum

$\ast$ $P_\omega(r) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E_\omega(r)$

klassisches Oszillatormodell

$$\ddot{\vec{P}}(r,t) = \underbrace{-\omega_0^2 \vec{P}(\vec{r},t)}_{\text{Rückstellkraft}} \overbrace{-\gamma_0 \dot{\vec{P}}(\vec{r},t)}^{\text{Dämpfung}} + \overbrace{\underbrace{n_0}_{\text{mittlere Elektronendichte}} \frac{q^2}{m} \vec{E}(\vec{r},t)}^{\text{Lorentzkraft}}$$

Polarisation wird durch das einfallende E-Feld induziert (Schwingung der Moleküle)

im Frequenzraum

$$-\omega^2 P_\omega = -\omega_0^2 P_\omega + n_0 \frac{q^2}{m} E_\omega + \gamma i \omega P_\omega$$

$\ast$ einsetzen

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 n_0}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

Verallgemeinerung auf viele Atome

$$\chi(\omega) = \sum_i \frac{q_i^2 n_i}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

viele Oszillatoren

i) Nichtresonanter Beitrag $\omega_i \gg \omega$

$$\chi_{nr} \approx \sum_i \frac{q_i^2 n_i}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_i^2}$$

reel und unabhängig von ω und trägt nicht zur Absorption bei

ii) Resonanter Beitrag $\omega \approx \omega_{i=0}$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = (\omega_0 - \omega) 2\omega_0$$

$$\chi_r(\omega) = \frac{q^2 n_0}{m\varepsilon_0} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0-\omega) - i\omega_0\gamma}$$

erweitert mit $(\omega_0-\omega)+i\hat{\gamma}_0$

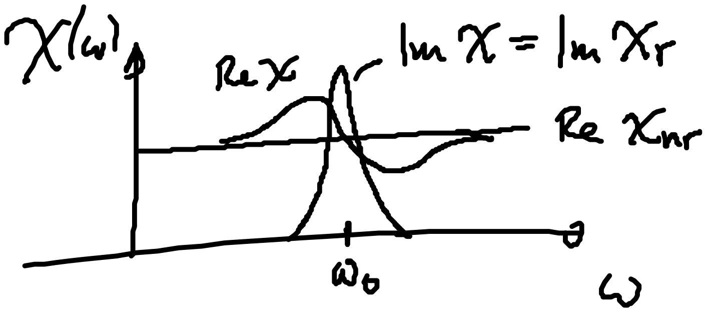
$$= \frac{q^2 n_0}{2m\varepsilon_0\omega_0} \frac{i\hat{\gamma}_0 + (\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)^2 + \hat{\gamma}_0^2}$$

erweitern

$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{2}\gamma_0$

Für $\hat{\gamma}_0 \neq 0$ besitzt $\chi_r(\omega)$ einen Imaginärteil

$\rightarrow$ Absorption



Absorption wird bei resonanter Anregung gemessen $\omega = \omega_0 = \omega_L$ (Lorenz-Kurve)

Die Brechzahl wird durch resonante und nichtresonante Beiträge bestimmt.

Breite der Resonanz ist bestimmt durch γ_0 (Dämpfung des Oszillators durch Kopplung an die Umgebung)