

Organisatorisches: DD-Tutorium (wegen Streit ausgefallen)

→ Treffen nach der VL im EW 710
(sonst in die Sprechstunde kommen)

weiter zu 8.5. Strahlungsfeld des elektrischen Dipols

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i\omega \underline{\vec{A}^{\perp}(\vec{r}, t)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \omega^2 \vec{d}_{\omega}^{\perp} \frac{e^{i\omega(\frac{r}{c} - t)}}{r}$$

Der Energiestrom ins Vakuum läßt sich über
den Poynting-Vektor bestimmen

$$\vec{S}_{\omega} = \vec{E}_{\omega} \times \vec{H}_{\omega}$$

$$\vec{E}_{\omega} = - \underbrace{\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi}}_{\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0}} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\underbrace{\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{d}_{\omega}) - \vec{d}_{\omega}}_{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{d}_{\omega})} \right]$$

bac. rule

$$\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{d}_{\omega}) = \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{d}_{\omega}) - \vec{d}_{\omega} \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)}_1$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 (\vec{e}_r \times \vec{d}_{\omega}) \times \vec{e}_r \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_\omega = \frac{1}{i\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$= \frac{1}{i\omega\mu_0 4\pi\epsilon_0} ik \vec{e}_r \times k^2 [(\vec{e}_r \times \vec{d}_\omega) \times \vec{e}_r] \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

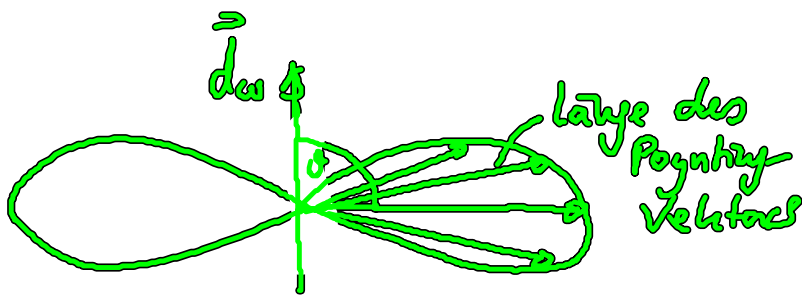
$$\omega = ck$$

$$= \frac{ck^2}{4\pi} (\vec{e}_r \times \vec{d}_\omega) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Poynting-Vektor

$$\vec{S}_\omega = \vec{E}_\omega \times \vec{H}_\omega \sim [\vec{e}_r \times \vec{d}_\omega] \times [(\vec{e}_r \times \vec{d}_\omega) \times \vec{e}_r]$$

$$= (\vec{e}_r \times \vec{d}_\omega)^2 \vec{e}_r = d_\omega^2 \sin^2 \theta \vec{e}_r$$



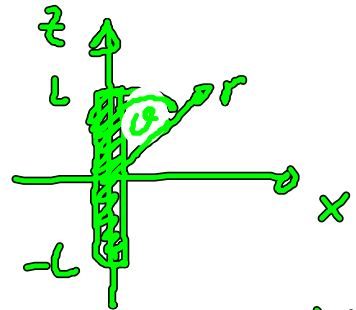
Winkel zwischen \vec{d} und \vec{e}_r Ausbreitungsrichtung

Die abgestrahlte Energie eines Dipols wird max. in Richtung senkrecht zu seiner Orientierung ($\sin \theta = 1$) und verschwindet in seiner Richtung

$$(\sin \theta = 0).$$

→ Weiteres Beispiel zur Ausstrahlung von elektromagnetischer Welle: lineare Antenne (genau als Übungsaufgabe)

$$\vec{j}_w(\vec{r}) = I_w(z) \delta(x) \delta(y)$$

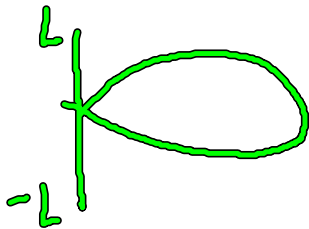


$$|\vec{E}_w|^2 \sim \frac{\tan^2 \theta}{r^2} \sin^2(kL \cos \theta)$$

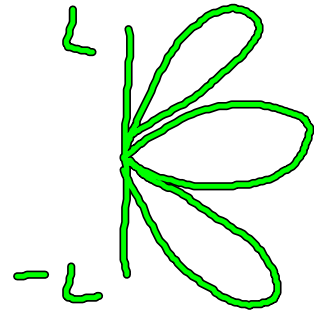
starke Abhängigkeit der Abstrahlungscharakteristik von der Länge der Antenne

$$L = m\lambda$$

$$m=1$$



$$m=2$$



Im Grenzfalle $kL \rightarrow 0$ erhält man

wieder die Abstrahlungscharakteristik eines Dipols

$$\sim \sin^2 \theta$$

9. Ausbreitung ebener Wellen in Materie

Absorption von Wellen → Lambert-Beer Gesetz

Brechung und Reflexion → Winkelverhältnisse
(Reflexions- und Brechungsgesetz)

Intensitätsverhältnisse

(Fresnel-Gleichungen)

Maxwell-Gleichung haben fortschreitende Wellen als Lösung, d.h. Energietransport von einem Punkt zum nächsten.

An Grenzflächen können sie reflektiert und transmittiert (Brechung, Absorption) werden.

Ausgangspunkt: Wellengleichung im Medium

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

$$\text{ges.: } \square \vec{E} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{\nabla} = -\nabla \times \nabla \times \quad E \perp \text{ zur Ausbreitungsrichtung}$$

Betrachten ebene Wellen: $E = f(z) \vec{e}_x$

hier verschwindet die Divergenz des elektr. Felds, d.h.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\begin{aligned} \square \vec{E} &= -\nabla \times \underline{\nabla \times \vec{E}} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \\ &= \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_M + \underbrace{\partial_t \vec{P}}_{\substack{\text{Dipoldichte} \\ \rightarrow \text{gebundene} \\ \text{Elektronen im} \\ \text{Molekül}}} + \nabla \times \vec{M} \quad \leftarrow \text{Magnetisierung}$$

$= \mu_0 \partial_t \vec{j}$

\vec{j}_M : makroskopischer Strom hervorgerufen durch freie Ladungen
 $\partial_t \vec{P}$: Dipoldichte \rightarrow gebundene Elektronen im Molekül
 $\nabla \times \vec{M}$: Magnetisierung

Im folgenden betrachten wir Ausbreitung ebener Wellen in z -Richtung innerhalb eines Dielektrikums

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) E(z,t) = \mu_0 \partial_t^2 P(z,t)$$

In linearen Medien: $P_\omega = \epsilon_0 \chi(\omega) E_\omega$

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) E(z,t) = -\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \chi(\omega) E_\omega$$

Einführung der Brechzahl $n(\omega)$, so daß

$$\left[\partial_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) \right] E_\omega = 0 \quad \left| \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \right.$$

mit $n^2(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ & diese beinhaltet die Eigenschaft des Mediums

$\chi(\omega)$ setzt sich aus allen optischen Übergängen in der Materie zusammen

$$\chi = \chi_{nr} + \chi_r$$

nichtresonanter
Beitrag

resonanter Beitrag

Übergangsfrequenz $\hat{=}$ Anregungsfrequenz

Lösung der Wellengleichung

Ansatz: $E_\omega = E_\omega^0 e^{i \frac{\omega}{c} n(\omega) z}$

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)} = \sqrt{1 + \chi_{nr} + \chi_r} \approx \sqrt{1 + \chi_{nr}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\chi_r}{1 + \chi_{nr}} \right)$$

$$= n_{nr} + \frac{1}{2} \frac{\chi_r}{n_{nr}}$$

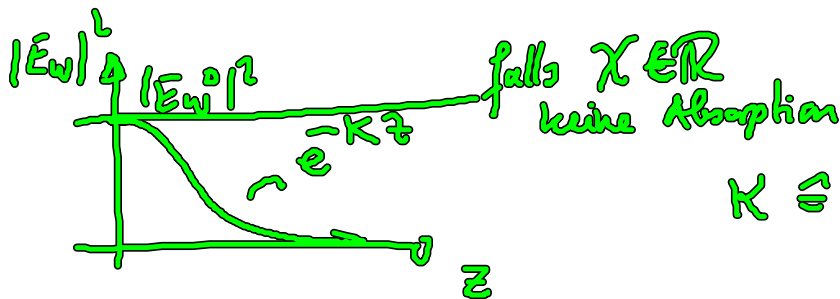
nichtresonante Effekte sind oft dominant, d.h. χ_r klein

Intensität

$$\# |E_\omega|^2 = |E_\omega^0|^2 e^{-Kz}$$

mit $K = \frac{\omega}{c} \frac{1}{n_{nr}} \boxed{\text{Im} \chi_r}$!

nur der Imaginärteil trägt zur Absorption bei



$K \hat{=}$ inverse Absorptionslänge

Lambert-Beer Gesetz:

exponentieller Abfall der Intensität durch Absorption im Medium

Allein der Imaginärteil von $\chi(\omega)$ trägt zur Absorption bei.

9.1. Suszeptibilität $\chi(\omega)$

A) Dielektrikum

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t)$$

klassisches Oszillatormodell

$$\ddot{\vec{p}}(\vec{r}, t) = -\omega_0^2 \vec{p}(\vec{r}, t) - \gamma_0 \dot{\vec{p}}(\vec{r}, t) + n_0 \frac{q^2}{m} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

↗ Dämpfung
↘ Lorentzkraft

↑ Rückstellkraft
↓ mittlere Elektronendichte

Polarisation wird durch das einfallende E-Feld

induziert (Schwingung der Moleküle)

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

im Frequenzraum

$$\begin{cases} -\omega^2 P_\omega - \omega_0^2 P_\omega + n_0 \frac{q^2}{m} E_\omega \\ + \gamma i \omega P_\omega \\ * \text{einsetzen} \end{cases}$$

Vollgemeinerung auf viele Atome

$$\chi(\omega) = \sum_i \frac{q_i^2 n_i}{m \epsilon_0} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

viele Oszillatoren

i) Nichtresonanter Beitrag $\omega_i \gg \omega$

$$\chi_{nr} \approx \sum_i \frac{q_i^2 n_i}{m \epsilon_0} \frac{1}{\omega_i^2}$$

reel und unabhängig von ω
und trägt nicht zur
Absorption bei

ii) Resonanter Beitrag $\omega \approx \omega_{i=0}$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = (\omega_0 - \omega) 2\omega_0$$

$$\chi_r(\omega) = \frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - i\omega_0 \gamma}$$

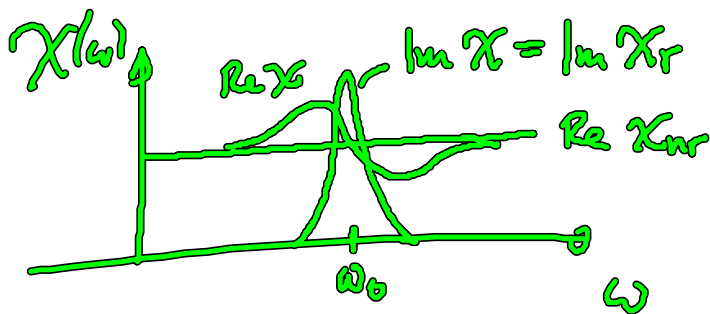
erweitern \nearrow

$$= \frac{q^2 n_0}{2m \epsilon_0 \omega_0} \frac{i\hat{\gamma}_0 + (\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \hat{\gamma}_0^2}$$

erweitert mit
 $(\omega_0 - \omega) + i\hat{\gamma}_0$
 $\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{2} \gamma_0$

Für $\gamma_0 \neq 0$ besitzt $\chi_r(\omega)$ einen Imaginärteil

\rightarrow Absorption



Absorption wird bei
 resonanter Anregung
 gemessen $\omega = \omega_0 = \omega_L$
 (Lorentz-Kurve)

Die Brechzahl wird durch resonante und nichtresonante
 Beiträge bestimmt.

Breite der Resonanz ist bestimmt durch γ_0
 (Dämpfung des Oszillators durch Kopplung an die
 Umgebung)