

Do-Tutorium \rightarrow Fr nach der VL im EW 731

weiter zu 9.1 Suszeptibilität.

kurze WH: - Ausbreitung ebener Wellen im Medium

- Startpunkt: Wellenl. für \vec{E}

- Einführung einer komplexen Brechzahl

$$n = \sqrt{1 + \chi}$$

- Lambert-Beer-Gesetz

$$|\vec{E}_\omega|^2 = |\vec{E}_\omega^0|^2 e^{-2 \frac{\omega}{c} \text{Im}(n) z}$$

exponentielles Abklingen der
Intensität (Absorption), falls

$$\text{Im}(n) \neq 0$$

- Suszeptibilität $\chi(\omega)$ in Dielektrika

$$\text{Oszillatormodell} \rightarrow \chi = \frac{q^2 n_0}{m f_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

B) Metalle

Vorgehen analog zum Dielektrikum.

Bei Metallen gibt es keine Rückstellkraft, d.h. $\omega_0 = 0$.

$$J_\omega = \sigma_L \vec{E}_\omega$$

$$j = \dot{p} \quad j\omega = -i\omega \epsilon_0 \chi(\omega) E\omega$$

$$j\omega = -i\omega P_\omega \quad \Rightarrow \quad \sigma_L(\omega) = -i\omega \chi(\omega)$$

$$P_\omega = \epsilon_0 \chi(\omega) E\omega \quad \text{d.h.} \quad \sigma_L \sim \chi$$

↑
elektrische Leitfähigkeit

Findet Absorption in Metallen statt?

$$\chi(\omega) \Big|_{\substack{\omega_0=0 \\ \Gamma=0}} = - \frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0} \frac{1}{\omega^2} = - \frac{\omega_{PL}^2}{\omega^2} \quad \text{mit der Plasmafrequenz } \omega_{PL}^2 = \frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0}$$

$$n = \sqrt{1 + \chi_r} = \left(1 - \frac{\omega_{PL}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_{PL}^2}$$

Für $\omega > \omega_{PL}$ sind Metalle transparent (keine Absorption).

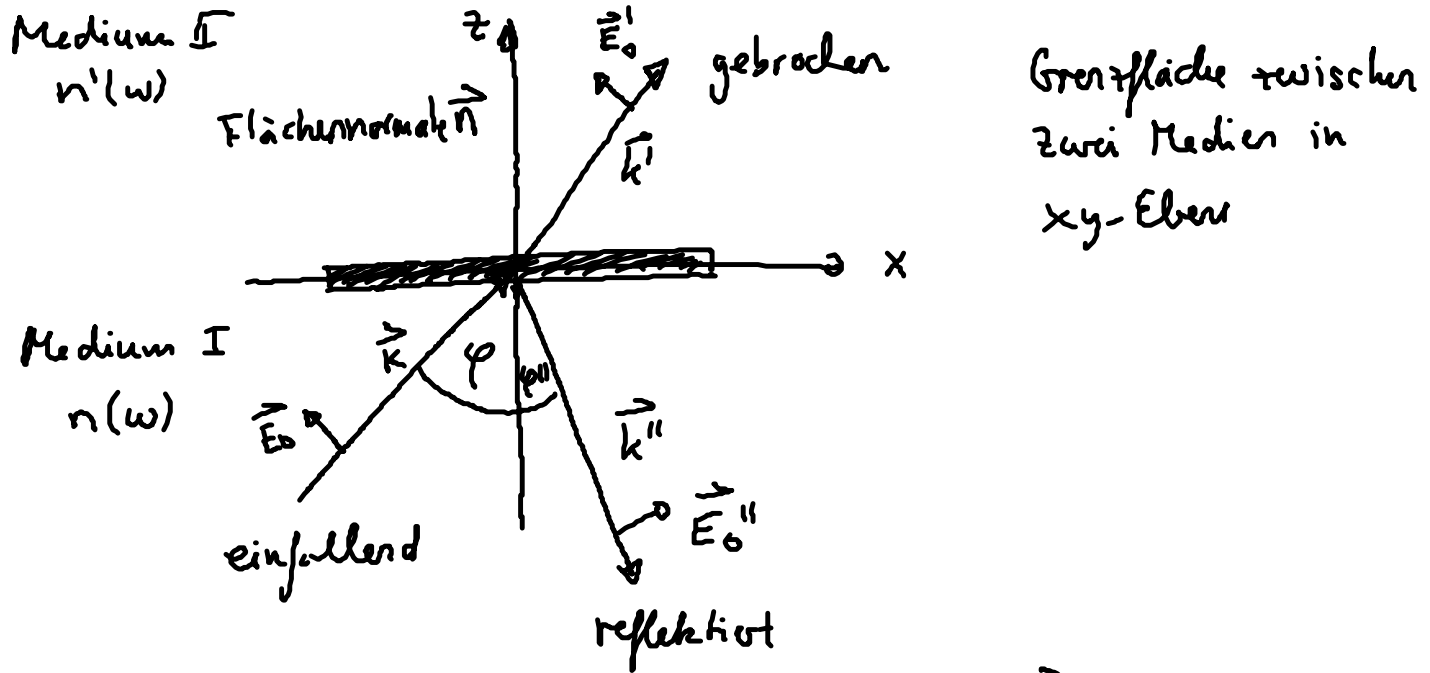
Für $\omega < \omega_{PL}$ ist n imaginär. \rightarrow Absorption

Energie wird in kollektive Plasmaoszillationen des Elektronengases (Plasmonen) umgewandelt.

9.2 Feldausbreitung durch eine Grenzfläche

Reflexion und Brechung von Wellen an ebenen Grenzflächen

ges.: Winkelbeziehungen \rightarrow Brechungs- und Reflexionsgesetz
 Intensitätsbeziehungen \rightarrow Fresnelsche Gleichung



Ansatz:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}_0' e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c_n} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{B}'' = \frac{1}{c_n} \frac{\vec{k}''}{k''} \times \vec{E}''$$

$$\vec{B}' = \frac{1}{c_{n'}} \frac{\vec{k}'}{k'} \times \vec{E}'$$

Da die RB an jedem r und t gelten, dürfen sich die Phasen der 3 Wellen auf $z=0$ höchstens um ein ganzzahlig Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \Big|_{z=0} = (\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t) \Big|_{z=0} + m\pi = (\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t) \Big|_{z=0} + n\pi$$

- Dies soll insbes. für $r=0, t=0$ gelten $\rightarrow n=m=0$
- Für $r=0, t \neq 0 \Rightarrow \omega = \omega'' = \omega'$, d.h. bei Reflexion und Brechung findet keine Frequenzänderung statt.
- Für $r \neq 0, t=0 \Rightarrow (\vec{k} \cdot \vec{r}) \Big|_{z=0} = (\vec{k}'' \cdot \vec{r}) \Big|_{z=0} = (\vec{k}' \cdot \vec{r}) \Big|_{z=0}$
 $k_x x + k_y y = \dots$

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass $k_y = 0$

$\Rightarrow k_y'' = k_y' = 0$, d.h. alle Vektoren liegen in einer Ebene, die durch \vec{t} und \vec{n} festgelegt ist.

$$k_x = k_x'' = k_x'$$

$$\Leftrightarrow k \sin \varphi = k'' \sin \varphi'' = k' \sin \varphi'$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} n \rightarrow k = k'' \text{ da im gleichen Medium}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi''} \quad \text{Reflexionsgesetz}$$

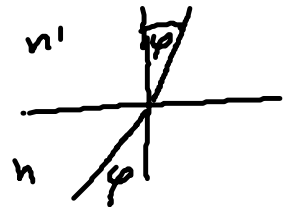
Einfallswinkel $\hat{=}$ Reflexionswinkel

$$k \sin \varphi = k' \sin \varphi'$$
$$\frac{\omega}{c_0} n \sin \varphi = \frac{\omega'}{c_0} n' \sin \varphi'$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{n}{n'}} \quad \text{Snelliussche Brechungsgesetz}$$

Falls Medium II optisch dichter, d.h. $n' > n$, folgt $\varphi' < \varphi$

\Rightarrow Welle zum Lot hin gebrochen



Ist Medium II optisch dünner \rightarrow Brechung vom Lot weg. Es existiert damit ein

$$\text{Grenzwinkel } \varphi_t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi' = \frac{n'}{n} \quad \text{Totalreflexion}$$

Gebrochene Welle ist dann eine reine Oberflächenwelle (evaneszente Welle) auf der Grenzfläche. \rightarrow Übungsaufgabe

Ableitung der Fresnelschen Formeln
 (Intensitätsverhältnisse bei Reflexion und Brechung)

ges.: $\frac{E_0'}{E_0}$ bzw. $\frac{E_0''}{E_0}$

Jede bel. polarisierte Welle lässt sich in 2 ^{senkrecht} zueinander polarisierte Wellen zerlegen. Daher betrachte 2 Spezialfälle:

A) $\vec{E} \perp$ Einfallsebene polarisiert, d.h. $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_y$

B) $\vec{E} \parallel$ ——— \parallel ———, d.h. $\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_y = 0$

A) Auswertung der Grenzbedingungen

i) \vec{E}_t ist kontinuierlich bei $z=0$

$$\vec{E}_t = \vec{E} \times \vec{n} \rightarrow \underline{(\vec{E} + \vec{E}'') \times \vec{n} = \vec{E}' \times \vec{n}}$$

Da im Fall A alle $\vec{E} \perp \vec{n}$, ist die Bedingung dann erfüllt, wenn $E_0 + E_0'' = E_0'$

ii) \vec{H}_t ist kontinuierlich bei $z=0$

$$\vec{H}_t = \vec{H} \times \vec{n} \rightarrow \underline{(\vec{H} + \vec{H}'') \times \vec{n} = \vec{H}' \times \vec{n}}$$

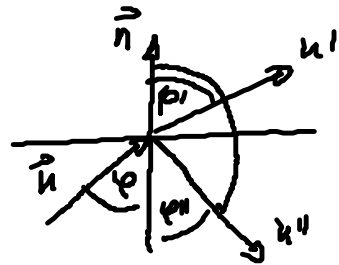
$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu_r} (\vec{k} \times \vec{E} + \vec{k}'' \times \vec{E}'') \times \vec{n} = \frac{1}{\mu_{r'}} (\vec{k}' \times \vec{E}') \times \vec{n}$$

$$\vec{n} \times (\vec{k} \times \vec{E}) \stackrel{\text{bac-r. s.}}{=} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{k}}_0 \text{ im Fall A) } - (\vec{n} \cdot \vec{k}) \vec{E}$$

$$\frac{1}{\mu_r} \left[\underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{k}) \vec{E}}_{k \cos \varphi} + \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{k}'') \vec{E}''}_{k'' \cos(\pi - \varphi'')} - k^0 \cos(\varphi'') \right] = \frac{1}{\mu_{r'}} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{k}') \vec{E}'}_{k' \cos \varphi'}$$

$$k = \frac{\omega}{c_n} = \frac{\omega}{c_0} n$$



$$\frac{n}{\mu_r} [E_0 \cos \varphi - E_0'' \cos \varphi''] = \frac{n'}{\mu_{r'}} E_0' \cos \varphi'$$

$E_0' - E_0$ (aufg. aus i) φ Reflexionsgesetz

$\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{n}{n'}$ Brechungsgesetz

$$\frac{2n}{\mu_r} E_0 \cos \varphi = \frac{1}{\mu_{r'}} E_0' \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \varphi} + \frac{n}{\mu_r} E_0' \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi' &= \sqrt{1 - \sin^2 \varphi'} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'} \sin \varphi\right)^2} \\ &= \frac{1}{n'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n \cos \varphi}{\frac{\mu_r}{\mu_{r'}} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \varphi} + n \cos \varphi}}$$

Amplitudenverhältnis bei der Brechung

Analog: Amplitudenverhältnis bei der Reflexion

$$\frac{\bar{E}_0''}{\bar{E}_0} = \frac{n \cos \varphi - \frac{\mu_r}{\mu_r'} \sqrt{n_1^2 - n^2 \sin^2 \varphi}}{n \cos \varphi + \frac{\mu_r}{\mu_r'} \sqrt{n_1^2 - n^2 \sin^2 \varphi}}$$

Fresnel Formeln
für \vec{E} senkrecht
polarisiert zur
Einfallsebene
analog für $\vec{E} \parallel \vec{n}$

Damit sind die reflektierte und gebrochene Feldamplitude als Fkt. des Einfallswinkels φ , der Brechungsindizes n, n' und der magnetischen Suszeptibilitäten μ_r, μ_r' der beiden Medien festgelegt.

Grenzfall: senkrechte Einfall, d.h. $\varphi = 0$ und $\mu = \mu_r'$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n'+n} \quad \text{und} \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n-n'}{n+n'}$$

Das gilt unabhängig von der Polarisationsrichtung.

Damit kann n' aus Messung von einfallendem und reflektiertem Feld bestimmt werden.

Wenn $n' > n$ erleidet E_0'' einen Phasensprung, da Vorzeichenwechsel.

B) \vec{E} parallel zur Einfallsebene polarisiert

Stetigkeitsbed. i) \vec{D}_n ist kontinuierlich

ii) \vec{B}_n — — —

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn' \cos \varphi}{n^2 \frac{\mu_r}{\mu_r'} \cos \varphi + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n^2 \frac{\mu_r}{\mu_r'} \cos \varphi - n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \varphi}}{\frac{\mu_r}{\mu_r'} n^2 \cos \varphi + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \varphi}}$$

Es gibt einen ausgezeichneten Winkel $\varphi = \varphi_B$ (Brewster-Winkel), bei dem $\frac{E_0''}{E_0} = 0$, d.h. es gibt keine reflektierte Welle in der Einfallsebene. Die Reflexion findet dann nur senkrecht zur Einfallsebene statt.

\vec{E} bel. Polarisation, $\varphi = \varphi_B \Rightarrow \vec{E}_0 = \vec{E}_0 \vec{e}_y$,
d.h. linear polarisiertes Licht

$$n^2 \cos \varphi_B = n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \varphi_B} \quad \text{für } \mu_r = \mu_r'$$

$$\alpha^4 (1 - \sin^2 \varphi_B) = \alpha^2 - \sin^2 \varphi_B \quad \text{mit } \alpha = \frac{n'}{n}$$

$$\sin^2 \varphi_B \underbrace{(1 - \alpha^4)}_{(1 - \alpha^2)(1 + \alpha^2)} = \alpha^2 (1 - \alpha^2) \quad \alpha = \frac{n'}{n}$$

$$\varphi_B = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \arctan \alpha$$

z.B. Glas-Luft-Übergang $\varphi_B = 36^\circ$