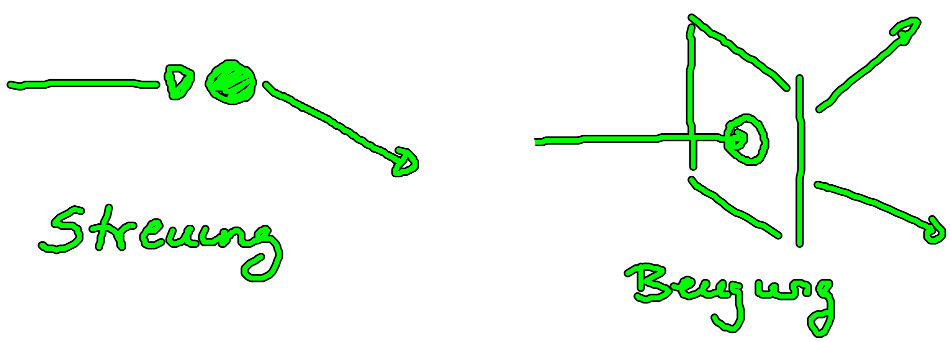
10. Streuung und Beugung elektromagnetischer Wellen

Streuung – WW einer em Welle mit einem kleinen Objekt
Gestreute Welle enthält Info über das Objekt

Beugung – WW einer em Welle mit einem makroskopischen Objekt (Hindernisse, Öffnungen)
Abweichung von geometrische Optik: Wellenintensität dringt in den geometrischen Schattenraum ein.



Streuung und Beugung eng miteinander verbunden, insbesondere wenn die Wellenlänge des Licht λ

$\sim$ Abmessung des Objekts d.

Für theoretische Beschreibung ist

$\frac{\lambda}{d}$ entscheidend.

Exakte Lösungen sind sehr schwierig.

10.1 Rayleigh Streuung

Elastische Streuung von Wellen an Teilchen, deren Durchmesser klein im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts λ ist, d.h.

$$\frac{\lambda}{d} \gg 1$$

Diese Bedingung ist bei Streuung von Licht an Partikeln in der Luft erfüllt $\to$ Erklärung für die blaue Farbe des Himmels.

Startpunkt: Maxwell-Gl. bei Abwesenheit von Quellen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D}$$

$$\underline{\underline{\nabla \cdot \vec{D} = 0}} \qquad \underline{\underline{\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}}}$$

Wellengl. für $\vec{D}$:

$$\Box \vec{D} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\vec{D}$$

i) $\varepsilon_0 \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\varepsilon_0 \partial_t \nabla \times \vec{B}$

ii) $\nabla \times \nabla \times \vec{D} = -\Delta \vec{D}$ $\quad \left[\Delta \vec{D} = \nabla \underbrace{\nabla \cdot \vec{D}}_{=0} - \nabla \times \nabla \times \vec{D}\right]$

iii) $-\Delta \vec{D} + \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E})$

(ii-i)

iv) $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{D} = \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla \times \vec{H}$

$-\mathrm{III} - \mathrm{IV}$ $\quad + \Delta \vec{D} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{D} = -\nabla\times\nabla\times(\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) + \varepsilon_0 \partial_t \nabla\times(\vec{B} - \mu_0 \vec{H})$

$$\Box \vec{D} = -\nabla\times\nabla\times(\vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}) + \varepsilon_0 \partial_t \nabla\times(\vec{B} - \mu_0\vec{H})$$

$$= -\vec{f}(r,t) \;\hat{=}\; \text{Quelle}$$

Korrekturen des Materials zur freien Ausbreitung im Vakuum

Störungstheoretisches Vorgehen: Änderung der freien Bewegung durch das Medium klein:

$$\vec{D} \neq \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} \neq \mu_0 \vec{H}$$

d.h. $\varepsilon_r \neq 1$ bzw. $\mu_r \neq 1$

zur Erinnerung
$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$
$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$

Die Wellengleichung hat die retardierte Lösung

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{f}\left(\vec{r}', t - \frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}}_{\text{inhomogen}} + \underbrace{D^0(r,t)}_{\text{homogen}}$$

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi} \sum_\omega \int d^3r' \, \frac{\vec{f}_\omega(\vec{r}')}{|r-r'|} e^{-i\omega\left(t - \frac{|r-r'|}{c}\right)} + \sum_\omega D_\omega^0 e^{-i\omega t}$$

$$\text{mit} \quad \vec{D}_\omega = \vec{D}_\omega^0 + \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \vec{f}_\omega(r')$$

wobei $\vec{f}_\omega(\vec{r}\,') = \vec{\nabla}' \times \vec{\nabla}' \times (\vec{D}_\omega - \varepsilon_0 \vec{E}_\omega)$
$+ i\omega\varepsilon_0 \nabla' \times (B_\omega - \mu_0 \vec{H}_\omega)$

Lösung im Fernfeld, d.h. $r' << r$

Ansatz: Kugelwelle mit Streuamplitude $\vec{A}_{St}$

$$\vec{D}_\omega = \vec{D}_\omega^0(r) + \frac{e^{ikr}}{r} A_{St}(r)$$

Taylor-Entwickl.

$$\text{mit} \quad \vec{A}_{St} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r'\, e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}\,'}\, \vec{f}_\omega(\vec{r}\,')$$

(siehe Kapitel 8.3)

Vereinfachung des Integrals durch partielle Integration

$$e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}\,'}\, \underbrace{\nabla' \times \vec{g}(r')}_{f_\omega} = ik\vec{e}_r \times \vec{g}(r')\, e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}\,'}$$

zweifache partielle Integr.

$$f_\omega(r') = -k^2 \vec{e}_r \times [\vec{e}_r \times (\vec{D}_\omega - \varepsilon_0 \vec{E}_\omega)] - \varepsilon_0 \omega k \vec{e}_r \times (\vec{B}_\omega - \mu_0 \vec{H}_\omega]$$

Für die explizite Berechnung der Streuamplitude $\vec{A}_{St}$ müssen die Felder bekannt sein. Diese sind i.A. unbekannt.

Näherungsweise Lösung durch Iteration.

Einfluß der Streuobjekte als Korrektur zu ε_0 bzw. μ_0

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left(1 + \delta\varepsilon(\vec{r})\right) \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \left(1 + \delta\mu(\vec{r})\right) \vec{H}(\vec{r})$$

dabei sollen $\delta\varepsilon(\vec{r})$ und $\delta\mu(\vec{r})$ klein bzgl. ε_0 und μ_0

1. Bornsche Näherung

$$\left(\vec{D}_\omega - \varepsilon_0 \vec{E}_\omega\right) \approx \varepsilon_0\, \delta\varepsilon(\vec{r})\, \vec{E}_\omega(\vec{r}) \approx \delta\varepsilon(\vec{r})\, \underline{\underline{\vec{D}^0_\omega}}(\vec{r})$$

$$\left(\vec{B}_\omega - \mu_0 \vec{H}_\omega\right) \approx \mu_0\, \delta\mu(\vec{r})\, \vec{H}_\omega(\vec{r}) \approx \delta\mu(\vec{r})\, \underline{\underline{\vec{B}^0_\omega}}(\vec{r})$$

d.h. in niedrigster Ordnung werden die Felder durch die freie (ungestörte) Lösung approximiert. Diese ist bekannt und damit kann die Wellengl. gelöst werden. Die neue (verbesserte) Lösung kann wieder in die 1. Ordnung eingesetzt werden, etc.

$\Rightarrow$ Iteratives Verfahren führt zur Bornschen Reihe

Die ungestörten Felder sind bekannt:

$$\vec{D}^0_\omega = \vec{e}_0\, D_0\, e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}}, \quad \vec{B}^0_\omega = \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\, \vec{k}_0 \times \vec{D}^0_\omega(\vec{r})$$

ebene Wellen, die sich in Richtung $\vec{k}_0$ ausbreiten

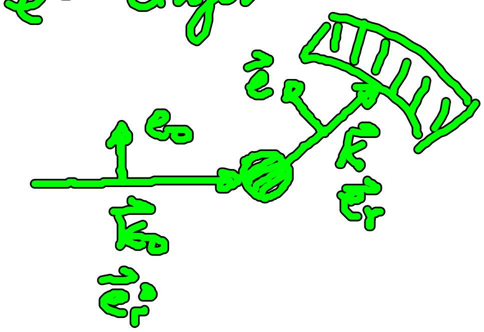
Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts S

$$S = \frac{|\vec{e}\cdot\vec{E}_{st}|^2}{|\vec{e}_0\cdot\vec{E}_0|^2}\, r^2$$

entspricht der in ein Raumelement in Richtung von $\vec{e}_r$ mit der Polarisation $\vec{e}$ abgestrahlten Leistung bezogen auf die in Richtung $\vec{e}_r^{\,0}$ mit der Polarisation $\vec{e}^{\,0}$ eingestrahlte Welle

$$\frac{\text{abgestrahlte Leistung}}{\text{eingestrahlte Leistung}}$$

$$S = \frac{|\vec{e}\cdot\vec{D}_{st}|^2}{|\vec{e}_0\cdot\vec{D}_0|^2}\, r^2$$



Berechnung für $\delta\varepsilon \neq 0$

$\delta\mu = 0$

(kein magnetisches Medium)

Einsetzen von $\vec{f}_\omega(\vec{r}\,')$ in $\vec{A}_{st}$

$$\vec{A}_{st} = \frac{k^2}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,'}\, \vec{e}_r \times \Big[\delta\varepsilon(\vec{r}\,')\, \underbrace{\vec{D}_\omega^{\,0}(\vec{r}\,')}_{=\ \vec{e}_0 D_0 e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}\,'}} \times \vec{e}_r\Big]$$

$D_{st} \sim \frac{e^{ikr}}{r} A_{st}$

$$S = \frac{|\vec{e}\cdot\vec{D}_{st}|^2}{|\vec{e}_0\cdot\vec{D}_0|^2}\, r^2$$

$$\vec{e}_r\times(\vec{e}_0\times\vec{e}_r) = \vec{e}_0\underbrace{(\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r)}_{=1} - \vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{e}_0)$$

$$= \frac{|\vec{e}\cdot\vec{A}_{st}|^2}{|D_0|^2} = \frac{k^4}{(4\pi)^2}\left|\int d^3r'\, e^{(\vec{k}_0-k)\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,'}\, \vec{e}\cdot\vec{e}_0\, \delta\varepsilon(\vec{r}\,')\right|^2$$

$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = 1$

da $\vec{e} \cdot \vec{e}_r = 0$ transversale Wellen

Wenn $\delta \varepsilon(r')$ bekannt, dann Lsg. möglich.

Anwendung der Rayleigh-Streuung in der Atmosphäre:

$$P_\omega = \sum_j \delta(r - r_j)\, d_j(\omega)$$

← Bewegungsgl. für $d_j(\omega)$ aufstellen

$$= \sum_j \delta(r - r_j)\, \varepsilon_0 \underbrace{\alpha_j(\omega)}_{\text{Polarisierbarkeit}} E_\omega(r_j)$$

$$\overset{\alpha_j = \alpha_0}{\approx} \sum_j \delta(r - r_j)\, \alpha_0 \quad \Rightarrow \delta \varepsilon(r) = \chi(r) = \frac{P_\omega}{\varepsilon_0 E_\omega}$$

$$S = \frac{k^4}{16\pi^2} |\vec{e}_0 \cdot \vec{e}|^2 \alpha_0^2 \Big| \underbrace{\sum_j e^{i \vec{q} \cdot \vec{r}_j}}_{\text{Strukturfaktor}} \Big|^2 \qquad \vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}$$

$$= \frac{k^4}{16\pi^2} \alpha_0^2 N_0 \cos^2 \sphericalangle(\vec{e}_0, \vec{e})$$

$$F(q) = \sum_i \sum_j e^{iq(r_i - r_j)}$$

für eine zufällige Anordnung von Streupartikeln überlebt nur der Term mit $r_i = r_j$

d.h. $F(q) = N_0$ Zahl der Moleküle

$$S \sim k^4 = \frac{\omega^4}{c^4}$$

$\Rightarrow$ blaues Licht wird viel stärker gestreut als rotes Licht, da

$$\omega_{blau} > \omega_{rot}$$

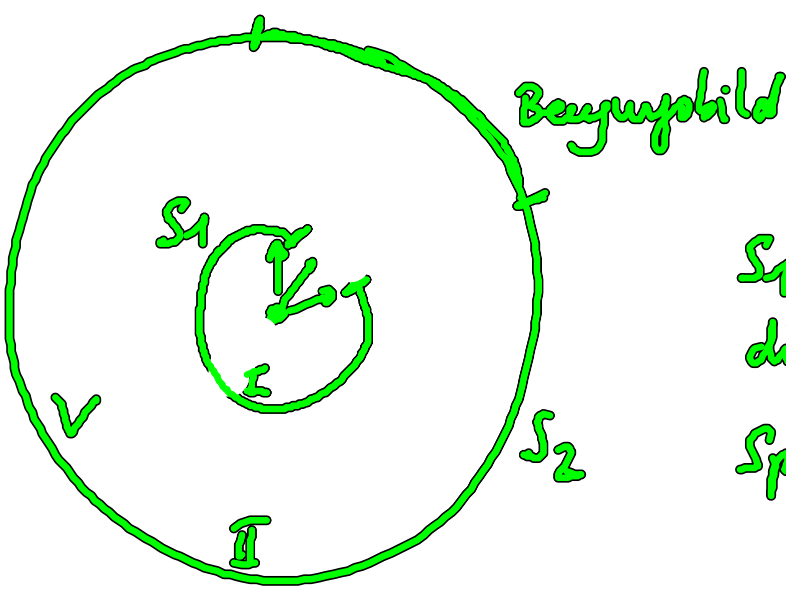
Himmelsblau: Im Licht, das nicht direkt von der Sonne kommt, sondern vorher gestreut wurde, ist blau stärker vertreten

Abendrot: In der Transmission wird blau stärker absorbiert $\to$ rot dominiert.

10.2. Skalare Beugungstheorie

WW von em Wellen mit Hindernissen und Öffnungen, deren Ausdehnung groß gegenüber der Wellenlänge des Lichts ist, d.h. $d \gg \lambda$

Vektoreigenschaften (Polarisationseffekte) werden vernachlässigt. Theorie für ein skalares Feld $\varphi(r,t)$ (stellvertretend für die Komponenten von $\vec{E}$, $\vec{B}$).



typische Situation bei Beugungserscheinungen

S_1 ist undurchlässig bis auf die Öffnung

Später $S_2 \to \infty$ (Fernfeld)
Fraunhofer Beugung

Innerhalb von V genügt φ der skalaren Helmholtz-Wellengl. $(\Delta + k^2)\varphi(\vec{r}) = 0$

Die dieser Wellengl. entsprechende Greens-Fkt. ist def. durch $(\Delta + k^2)\, G(r,r') = -\delta(r-r')$

wird als bekannt angenommen

ges.: $\varphi(\vec{r})\big|_{S_2}$

$$G(r,r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}$$

Ausgangspkt. der Kirchhoffschen Theorie der Beugung ist der Greens-Satz:

$$\int_V d^3r \left(\phi \Delta \phi' - \phi' \Delta \phi\right) = \int_{\partial V} (\phi \nabla \phi' - \phi' \nabla \phi) \cdot d\vec{A}$$

folgt aus dem Gaußsatz

ϕ, ϕ' bel. skalare Felder

Sei $\phi' = \varphi$ die gesuchte Feldkomponente,

$\phi = G$.

$$\int_V d^3r' \left[G(r,r') \underbrace{\Delta\varphi(\vec r')}_{\underline{\underline{-k^2\varphi(r)}}} - \varphi(\vec r') \underbrace{\Delta' G(\vec r,\vec r')}_{-\delta(\vec r-\vec r')-\underline{\underline{k^2 G(r,r')}}} \right] = \varphi(\vec r)$$

Wellengleichung — Wellengl. für G

$$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \oint_{S_1}\oint_{S_2} d\vec A \left[G(\vec r,\vec r')(\vec n'\cdot\vec\nabla')\varphi(\vec r') - \varphi(\vec r')(\vec n'\cdot\vec\nabla')G(\vec r,\vec r') \right]$$

$\vec n$ ist der Normalenvektor des Oberflächenelements

$d\vec A' = \vec n'\cdot dA$ zeigt immer nach außen

Kirchhoffsches Beugungsintegral

G einsetzen:

$$\varphi(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_1} dA' \frac{e^{ikR}}{R}\, \vec n' \left[\nabla'\varphi(\vec r') + \underline{ik\left(1+\frac{1}{kR}\right)}\frac{\vec R}{R}\varphi(\vec r') \right.$$

$$R = |r - r'|$$

$$G = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}$$

$$\vec n'\cdot\vec\nabla' G(\vec r,\vec r')$$

$$= \frac{1}{4\pi}\vec n'\left[-ik\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\vec R}{R} + e^{ikR}\underbrace{\nabla'\frac{1}{R}}_{\frac{\vec R}{R^3}} \right]$$

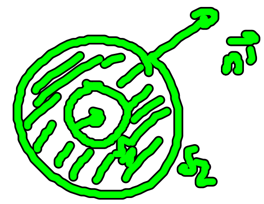
$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\vec n'\cdot\left(ik\frac{\vec R}{R}\left(1-\frac{1}{ikR}\right) \right]$$

Approximation: $S_2 \to \infty$

so daß $\varphi(\vec{r}')\big|_{S_2} = 0$

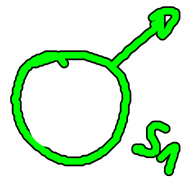
$\Rightarrow$ d.h. es wird nur noch über S_1 integriert

vorher



$\vec{n}'$ zeigt nach außen ($\Rightarrow$ ein Vorzeichen)

nachher



$\varphi(r)$ im Volumen V läßt sich bestimmen, falls φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}$ auf S_1 bekannt sind.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n'} = \vec{n}' \cdot \nabla' \varphi(r')$$

Kirchhoffsche Annahmen:

i) $\varphi(r)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}$ verschwinden überall auf S_1 bis auf die Öffnungen

ii) In den Öffnungen entsprechen φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}$ den Werten einer einfallenden Welle bei Abwesenheit der Hindernisse

($\hat{=}$ 1. Bornschen Näherung)

Sämtliche Standardberechnungen von Beugungs-
erscheinungen beruhen auf diesen Annahmen.

Leider math. inkonsistent, da aus Wellengl. folgt, dass, wenn φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}$ Null auf einer bel. Fläche verschwinden, $\varphi = 0$ überall gilt.

Verbesserung:
- vektorielle Beugungstheorie
- geeignete Greens-Fkt, die RB genügt.