

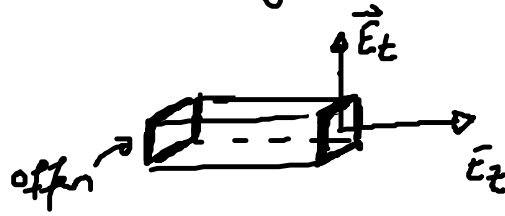
11. Führung und Speicherung von Wellen

Speicherung in Resonatoren



z.B. Laser

Führung in Wellenleitern



z.B. Glasfaser

Randwertproblem: Innerhalb des Hohlraums gibt es keine Quellen, d.h. es gelten die freien Maxwell-Gl.
An Grenzflächen verschwindet \vec{E}_t und \vec{B}_n bei metallischer Oberfläche des Hohlraums.

Lösung des Problems hängt von der Geometrie des Hohlraums ab.

1. Schritt: Reduzierung der Komplexität

$$\vec{E} = \vec{E}_t + E_z \vec{e}_z, \text{ wobei } \vec{E}_t = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

Zerlegung der Maxwell-Gl. in die beiden Komponenten.

$$\text{Dazu } \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{e}_z \partial_z \text{ mit } \vec{\nabla}_t = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad | \quad \vec{e}_z \times \text{ von links}$$

$$\vec{e}_z \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = i\omega \vec{e}_z \times \vec{B} = i\omega \vec{e}_z \times (\underbrace{\vec{B}_t + B_z \vec{e}_z}_{\vec{B}}) = i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t \quad \uparrow \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

|| bar-cab

$$\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{e}_z \cdot \vec{E})}_{\vec{\nabla} E_z} - \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}}_{\partial_z \vec{E}} = \underbrace{\vec{\nabla}_t E_z + \cancel{\partial_z E_z}}_{\vec{\nabla} E_z} - \underbrace{\partial_z \vec{E}_t - \cancel{\partial_z E_z}}_{\partial_z \vec{E}_t}$$

$$\Rightarrow \partial_z \vec{E}_t = -i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t + \vec{\nabla}_t E_z$$

$$\text{analog} \quad \partial_z \vec{B}_t = i \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_z \times \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t B_z \quad \left. \vphantom{\partial_z \vec{B}_t}} \right| \quad *$$

Ansatz

→ Wellenleiter: laufende Welle $e^{\pm ik_z z}$

→ Resonator: stehende Welle $\cos(k_z z), \sin(k_z z)$

11.1 Wellenleiter: Ausbreitung von Wellen

Annahme: Ausbreitung in positive z-Richtung

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0(x, y)}_{\substack{\uparrow \\ \text{gesucht}}} e^{+ik_z z} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{B}_0(x, y)}_{\substack{\uparrow \\ \text{gesucht}}} e^{+ik_z z} e^{-i\omega t}$$

↑
gesucht

Einsetzen in *

$$ik_z \vec{E}_t + i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t = \nabla_t \vec{E}_z \Rightarrow \vec{E}_t = \frac{\nabla_t E_z - i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t}{ik_z}$$
$$\vec{B}_t = \frac{\nabla_t B_z + \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_z \times \vec{E}_t}{ik_z}$$

$$ik_z \vec{E}_t - \nabla_t E_z - \frac{\omega}{k_z} \vec{e}_z \times \nabla_t B_z + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{ik_z} \underbrace{\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{E}_t)}_{\vec{e}_z (\vec{e}_z \cdot \vec{E}_t) - \vec{E}_t (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}$$
$$\vec{E}_t \left(ik_z + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{ik_z} \right) = \nabla_t E_z - \frac{\omega}{k_z} \vec{e}_z \times \nabla_t B_z \quad | ik_z \quad \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\vec{E}_t = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \left[k_z \nabla_t E_z - \omega \vec{e}_z \times \nabla_t B_z \right]$$

analog $\vec{B}_t = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \left[k_z \nabla_t B_z - \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_z \times \nabla_t E_z \right]$

\Rightarrow Transversalkomponenten \vec{E}_t, \vec{B}_t lassen sich aus den skalaren Feldern E_z, B_z bestimmen!

Betrachte 2 Grenzfälle:

A) $B_z = 0$: transversal-magnetische Wellen (TM)
d.h. $\vec{B} \perp \vec{e}_z$

B) $E_z = 0$: transversal-elektrische Wellen (TE)
d.h. $\vec{E} \perp \vec{e}_z$

Die allg. Lsg. kann eine Linearkombination der beiden Fälle sein.

A) Bestimmung von $E_z(x, y)$

$$\square E_z = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\Delta_t + \Delta_z - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) E_z = 0$$

gilt im Hohlraum

$$\left(\Delta_t - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z = 0$$

Außerdem muss die RB erfüllt sein

$$\vec{E}_t = \vec{n} \times \vec{E} \quad |_{\text{Rand}} = 0$$

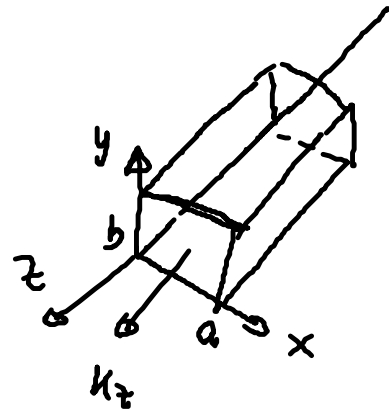
$$\vec{n} \times (\vec{E}_t + E_z \vec{e}_z) \Big|_{\text{Rand}} = \vec{n} \times \left(\frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} k_z \vec{\nabla}_t E_z + E_z \vec{e}_z \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$E_z|_{\text{Rand}} = 0$ erfüllt die RB.

Beispiel: Rechteckiger Wellenleiter

Ann.: Innen Vakuum
Wände aus Metall

ges.: TM-Moden, TE-Moden



i) Berechnung von E_z

$$\left(\Delta_t - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z = 0 \quad ; \quad E_z|_{\text{Rand}} = 0$$

Ansatz: $E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)$

Einsetzen in die Wellengleichung:

$$-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 \rightarrow k(\omega)$$

Dispersionsrelation

Wann erfüllen die Lsg. die RB $E_z|_{\text{Rand}} = 0$?

$$k_x = m \frac{\pi}{a}, \quad k_y = n \frac{\pi}{b} \quad \text{mit } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

m, n nummerieren die verschiedenen möglichen Lsg. des Felds im Wellenleiter: Moden

Dabei muß die Dispersionsrelation gelten

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Dispersionsrelation im Vakuum $k_z = \frac{\omega}{c}$

erhält man für $a, b \rightarrow \infty$

Diskussion der Dispersionsrelation

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

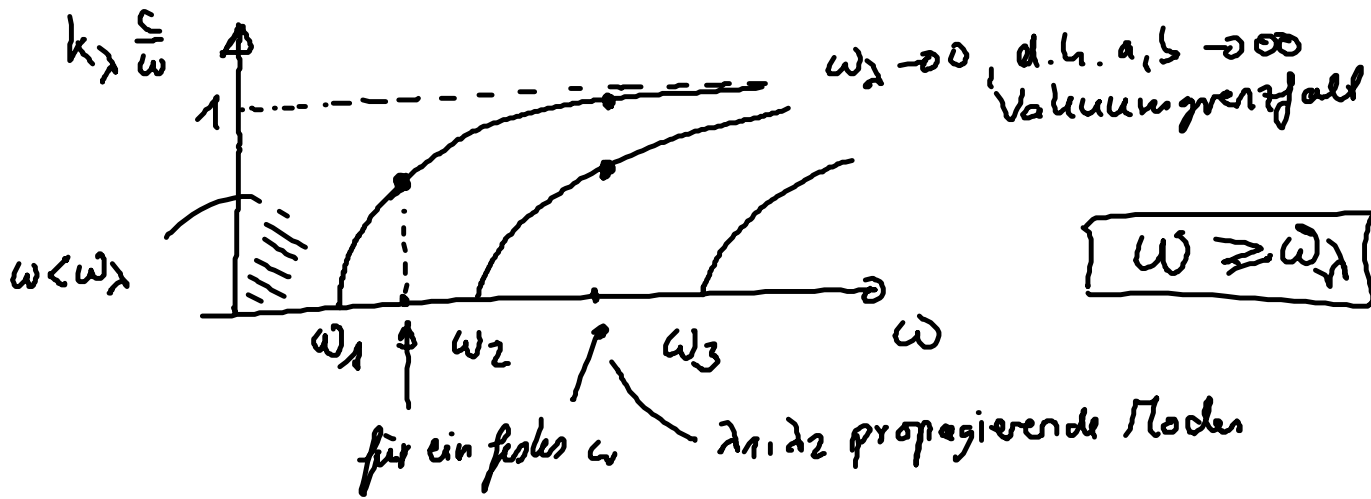
k_z muß reell sein, damit sich die Welle ausbreiten kann, ansonsten wird die Welle gedämpft.

Die Abschnidefrequenz $\omega_{\text{cut}, \lambda}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$

Für $\omega \geq \omega_\lambda$ propagierende Welle

$$k_\lambda = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\lambda, \text{cut}}^2}{\omega^2}}$$

$\lambda = (n, m)$ Mode des Wellenleiters



Wellenzahl k_λ als Funktion der Frequenz ω
für verschiedene Grenzfrequenzen ω_λ

- Für eine feste vorgegebene Frequenz ω , die der Wellenleiter übertragen soll, können sich nur eine endliche Anzahl von Moden λ ausbreiten.
- Wenn man nur eine Mode möchte, muß die Geometrie des Leiters so gewählt werden, daß nur die niedrigste Frequenz auftreten kann, d.h. a, b klein wählen

Bisher haben wir E_z aus Wellenlgl. + RB bestimmt.

Nun Bestimmung von \vec{E}_t :

$$ii) \quad \vec{E}_t^{TR} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ 0 \end{pmatrix} \vec{\nabla}_t E_z = \underbrace{E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)}_{E_z}$$

$$= \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} k_z(\omega) \bar{E}_0 \begin{pmatrix} k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

E_z Bereich bestimmt

$$\Rightarrow \vec{E} = (\vec{E}_t + \vec{E}_z \vec{e}_z) e^{ik_z(\omega)z} e^{-i\omega t}$$

vollständig festgelegt

analog für TE Moden.

11.2 Resonatoren - Speicherung von Wellen

Lösung der Wellenlsg. : stehende Welle

Ansatz: $\vec{E}(r,t) = (A \sin(k_z z) + B \cos(k_z z)) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{-i\omega t}$

Die RB muß zusätzlich auch an den Endflächen erfüllt sein:

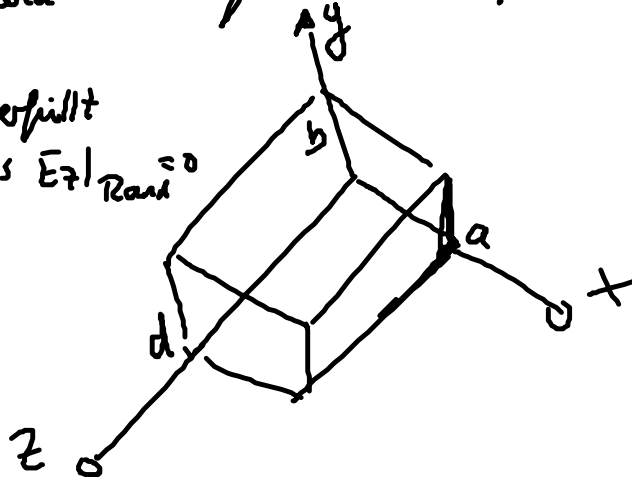
$$E_t|_{\text{Rand}} = 0 \quad \text{für } z=0, d$$

Zusätzliche Ränder

$$E_z(z=0) = 0$$

$$E_z(z=d) = 0$$

ist erfüllt falls $E_z|_{\text{Rand}} = 0$



erfüllt nicht die RB

Ansatz:

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin\left(l \frac{\pi}{d} z\right) e^{-i\omega t}$$

$$k_x = m \frac{\pi}{a}$$

$$k_y = n \frac{\pi}{b}$$

$$\begin{array}{l} \nearrow \\ z=0 \\ z=d \end{array} \text{ RB erfüllt}$$

Einsetzen in die Wellengl.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \bar{E}_z = 0$$

$$-k_x^2 - k_y^2 - \ell^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

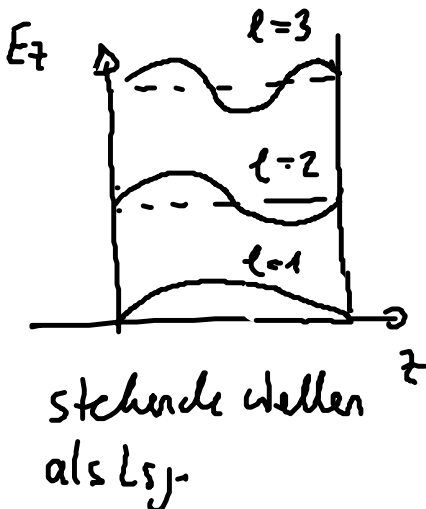
\Rightarrow Dispersionsrelation

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\ell}{d} \right)^2 \right]$$

Bestimmungsgl. für die Frequenz der ems Wellen, die in einem Resonator gespeichert werden können $\hat{=}$ Eigenfrequenzen ω_λ bzw.

Moden λ des Resonators

$$\lambda = (m, n, \ell)$$



$$\vec{E}_t = -i \frac{k_z E_0}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \sin\left(\ell \frac{\pi}{d} z\right)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin\left(\ell \frac{\pi}{d} z\right) e^{-i\omega t}$$

Wichtigste Anwendung: Laser

In der Praxis wird der Resonator so gebaut, dass er möglichst nur die resonante Frequenz des optisch aktiven Mediums enthält.

Elektrodynamik VL - kurzer Überblick

→ Gesamtheit aller em. Phänomene → Maxwell-Gl.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} + \mu_0 \vec{j}$$

→ Zeitabh. Lsg. der Maxwell-Gl. sind fortschreitende Wellen $f(k \cdot r \pm \omega t)$

→ Ebene Wellen sind Lsg. der Maxwell-Gl.
 $e^{i(k \cdot r - \omega t)}$

Lösungen über homogene Wellengl.

$$\square \varphi(r, t) = 0$$

Jede Komponente von E, B erfüllt diese

→ Elektromagnetische Potentiale

$$\underline{E} = -\nabla\varphi - \dot{\underline{A}}$$

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A}$$

gekoppeltes System von 4
partiellen DGL 1. Ordnung

↓ Potentiale

2 partielle DGL 2. Ordnung

Eichfreiheit: Coulomb-Eichung, Lorenzeichung

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0$$

$$\text{div } \underline{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} = 0$$

→ Multipolentwicklung bei einer räumlich begrenzten
Ladungsverteilung → Dipolmoment, Quadrupolmoment

→ Makroskopische Maxwellgleichungen
Einfluss der Materie

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}, \quad \nabla \times \underline{H} = \partial_t \underline{D} + \underline{j}$$

Einführung von i) dielektrisches Verschiebungsfeld

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

ii) magnetische Feldstärke

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} (\underline{B} - \underline{M})$$

→ Materialgleichungen

Maxwellgl. benötigen Input; $\rho, \vec{j}, \vec{P}, \vec{M}$

Ohmsches Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

lineare Medien $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

→ Randwertprobleme

Stetigkeitsbed.: Maxwell + Satz von Gauß und Stokes

$$i) (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0$$

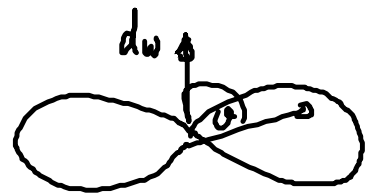
$$ii) (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

$$iii) (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_F \quad \text{Flächenladungsdichte}$$

$$iv) (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_F \quad \text{Flächenstromdichte}$$

→ Erzeugung von Wellen: zeitl. veränderliche Quellen

Dipolstrahlung $S \sim d\omega^2 \sin^2 \theta$
Polarwinkel



→ Ausbreitung in Materie

Absorption $|E|^2 \sim e^{-\kappa z}$

Reflexionsgesetz, Brechungsgesetz

Fresnelsche Gleichungen

→ Rayleigh Streuung $S \sim \omega^4$

Wirkungswirkung

→ Fraunhofer Beugung
Skalare Beugungstheorie

$$|E(\vartheta)|^2 \sim \left| \frac{\sin x}{x} \right|^2$$



→ Geometrische Optik

Strahlengang in inhomogenen Medien (Eikonaltheorie)

→ Führung und Spieglung von eum Wellen

im Januar:

→ Relativistische Elektrodynamik

→ Quantisierung des Lichts