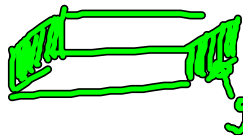


# 11. Führung und Speicherung von Wellen

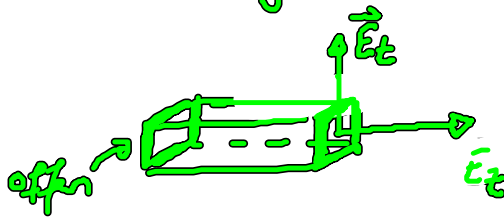
Speicherung in Resonatoren



geschlossen

z.B. Laser

Führung in Wellenleitern



offen

z.B. Glasfaser

Randwertproblem: Innerhalb des Hohlraums gibt es keine Quellen, d.h. es gelten die freien Maxwell-Gl.  
An Grenzflächen verschwindet  $\vec{E}_t$  und  $\vec{B}_n$  bei metallischer Oberfläche des Hohlraums.

Lösung des Problems hängt von der Geometrie des Hohlraums ab.

1. Schritt: Reduzierung der Komplexität

$$\vec{E} = \vec{E}_t + E_z \vec{e}_z, \text{ wobei } \vec{E}_t = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

Zerlegung der Maxwell-Gl. in die beiden Komponenten.

$$\text{Dazu } \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{e}_z \partial_z \text{ mit } \vec{\nabla}_t = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad | \quad \vec{e}_z \times \text{vm links}$$

$$\vec{e}_z \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = i\omega \vec{e}_z \times \vec{B} = i\omega \vec{e}_z \times (\underbrace{\vec{B}_t + B_z \vec{e}_z}_{\vec{B}}) = i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t \quad \uparrow \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

|| bar-cab

$$\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{e}_z \cdot \vec{E})}_{\vec{\nabla} E_z} - \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}}_{\partial_z \vec{E}} = \underbrace{\vec{\nabla}_t E_z + \cancel{\partial_z E_z}}_{\vec{\nabla} E_z} - \underbrace{\partial_z \vec{E}_t - \cancel{\partial_z E_z}}_{\partial_z \vec{E}_t}$$

$$\Rightarrow \partial_z \vec{E}_t = -i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t + \vec{\nabla}_t E_z$$

$$\text{analog} \quad \partial_z \vec{B}_t = i \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_z \times \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t B_z \quad | \quad *$$

→ Wellenleiter: laufende Welle  $e^{i(k_z z - \omega t)}$  Ansatz

→ Resonator: stehende Welle  $\cos(k_z z), \sin(k_z z)$

## 11.1 Wellenleiter: Ausbreitung von Wellen

Annahme: Ausbreitung in positive z-Richtung

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0(x, y)}_{\text{gesucht}} e^{+ik_z z} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{B}_0(x, y)}_{\text{gesucht}} e^{+ik_z z} e^{-i\omega t}$$

↑  
gesucht

Einsetzen in \*

$$ik_z \vec{E}_t + \omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t = \vec{\nabla}_t E_z \Rightarrow \vec{E}_t = \frac{\vec{\nabla}_t E_z - i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t}{ik_z}$$

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{\nabla}_t B_z + \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_z \times \vec{E}_t}{ik_z}$$

$$ik_z \vec{E}_t - \vec{\nabla}_t E_z - \frac{\omega}{k_z} \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t B_z + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{ik_z} \underbrace{\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{E}_t)}_{\vec{e}_z (\vec{e}_z \cdot \vec{E}_t) - \vec{E}_t (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}$$

$$\vec{E}_t \left( ik_z + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{ik_z} \right) = \vec{\nabla}_t E_z - \frac{\omega}{k_z} \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t B_z \quad | ik_z$$

$$\vec{E}_t = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \left[ k_z \vec{\nabla}_t E_z - \omega \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t B_z \right]$$

analog  $\vec{B}_t = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \left[ k_z \vec{\nabla}_t B_z - \frac{\omega}{c^2} \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t E_z \right]$

⇒ Transversalkomponenten  $\vec{E}_t, \vec{B}_t$  lassen sich aus den skalaren Feldern  $E_z, B_z$  bestimmen!

Betrachte 2 Grenzfälle:

A)  $B_z = 0$ : transversal-magnetische Wellen (TM)  
d.h.  $\vec{B} \perp \vec{e}_z$

B)  $E_z = 0$ : transversal-elktische Wellen (TE)  
d.h.  $\vec{E} \perp \vec{e}_z$

Die allg. Lsg. kann eine Linearkombination der beiden Fälle sein.

# A) Bestimmung von $E_z(x, y)$

$$\square E_z = 0 \quad \rightarrow \quad (\Delta_t + \Delta_z - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) E_z = 0$$

gilt im Hohlraum

$$(\Delta_t - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) E_z = 0$$

Außerdem muss die RB erfüllt sein

$$\vec{E}_t = \vec{n} \times \vec{E} \quad (R_{\text{Rand}} = 0)$$

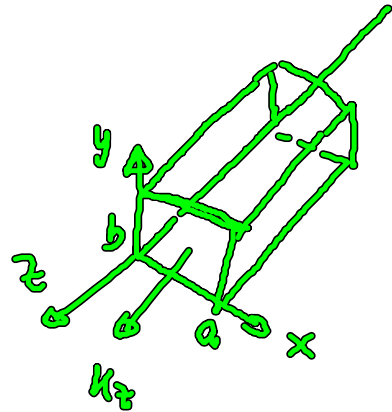
$$\vec{n} \times (\vec{E}_t + E_z \vec{e}_z) |_{\text{Rand}} = \vec{n} \times \left( \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} k_z \vec{\nabla}_t E_z + E_z \vec{e}_z \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$E_z |_{\text{Rand}} = 0$  erfüllt die RB.

Beispiel: Rechteckiger Wellenleiter

Ann.: Innen Vakuum  
Wände aus Metall

ges.: TM-Moden, TE-Moden



i) Berechnung von  $E_z$

$$\left( \Delta_t - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z = 0 \quad ; \quad E_z |_{\text{Rand}} = 0$$

Ansatz:  $E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)$

Einsetzen in die Wellengleichung:

$$-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 \rightarrow k(\omega)$$

Dispersionsrelation

Wann erfüllen die Lsg. die RB  $E_z|_{\text{Rand}} = 0$ ?

$$k_x = m \frac{\pi}{a}, \quad k_y = n \frac{\pi}{b} \quad \text{mit } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$m, n$  nummerieren die verschiedenen möglichen Lsg. des Felds im Wellenleiter: Modus

Dabei muß die Dispersionsrelation gelten

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Dispersionsrelation im Vakuum  $k_z = \frac{\omega}{c}$   
 erhält man für  $a, b \rightarrow \infty$

Diskussion der Dispersionsrelation

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

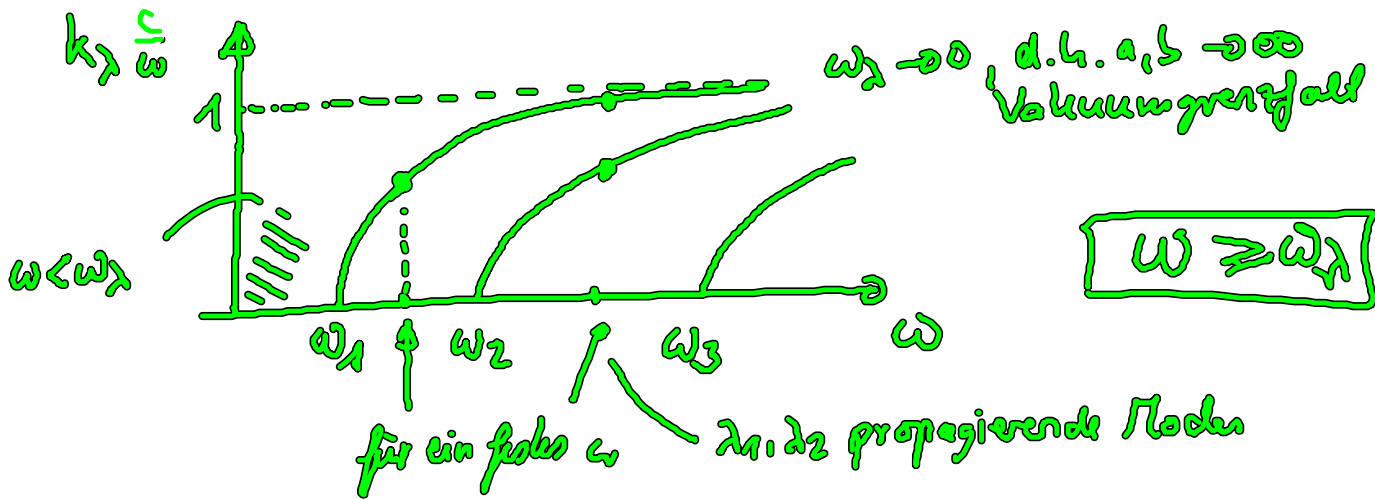
$k_z$  muß reell sein, damit sich die Welle ausbreiten kann, ansonsten wird die Welle gedämpft.

Die Abschnidefrequenz  $\omega_{\text{cut}, \lambda}^2 = c^2 \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$

Für  $\omega \geq \omega_\lambda$  propagierende Welle

$$k_\lambda = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\lambda, \text{cut}}^2}{\omega^2}}$$

$\lambda = (n, m)$  Mode des Wellenleiters



Wellenzahl  $k_\lambda$  als Funktion der Frequenz  $\omega$  für verschiedene Grenzfrequenzen  $\omega_\lambda$

- Für eine feste vorgegebene Frequenz  $\omega$ , die der Wellenleiter übertragen soll, können sich nur eine endliche Anzahl von Moden  $\lambda$  ausbreiten.
- Wenn man nur eine Mode möchte, muß die Geometrie des Leiters so gewählt werden, daß nur die niedrigste Frequenz auftreten kann, d.h.  $a, b$  klein wählen

Bisher haben wir  $E_z$  aus Wellengl. + RB bestimmt.

Nun Bestimmung von  $\vec{E}_t$ :

$$ii) \quad \vec{E}_t^{\text{TR}} = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ 0 \end{pmatrix} k_z \vec{D}_t E_z = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$= \frac{i}{k_x^2 + k_y^2} k_z(\omega) \vec{E}_0 \begin{pmatrix} k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E_z$  Bereich bestimmt

$$\Rightarrow \vec{E} = (\vec{E}_t + E_z \vec{e}_z) e^{ik_z(\omega)z} e^{-i\omega t}$$

vollständig festgelegt

analog für TE Moden.

## 11.2 Resonatoren - Speicherung von Wellen

Lösung der Wellenlsg: stehende Welle

Ansatz:  $\vec{E}(r,t) = (A \sin(k_z z) + B \cos(k_z z)) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{-i\omega t}$

Die RB muß zusätzlich auch an den Endflächen erfüllt sein:

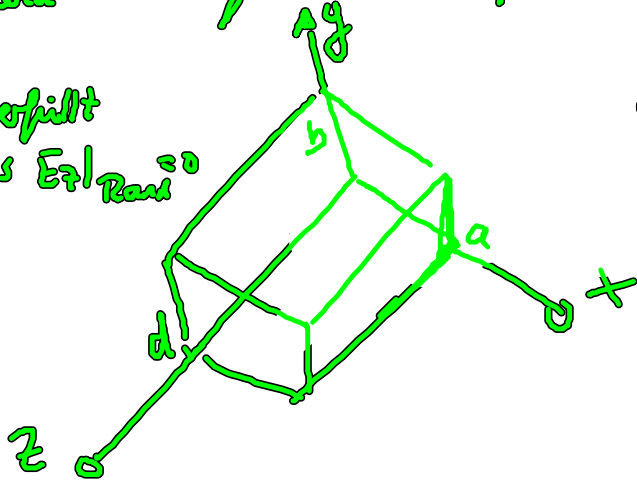
$$E_t|_{\text{Rand}} = 0 \text{ für } z=0, d$$

Zusätzliche Ränder

$$E_z(z=0) = 0$$

$$E_z(z=d) = 0$$

φ ist erfüllt falls  $E_z|_{\text{Rand}} = 0$



erfüllt nicht die RB

Ansatz:

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin\left(l \frac{\pi}{d} z\right) e^{-i\omega t}$$

$$k_x = m \frac{\pi}{a}$$

$$k_y = n \frac{\pi}{b}$$

$$\begin{array}{l} \nearrow \\ z=0 \\ z=d \end{array} \quad \text{RB erfüllt}$$

Einsetzen in die Wellenagl.

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \bar{E}_z = 0$$

$$-k_x^2 - k_y^2 - \ell^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

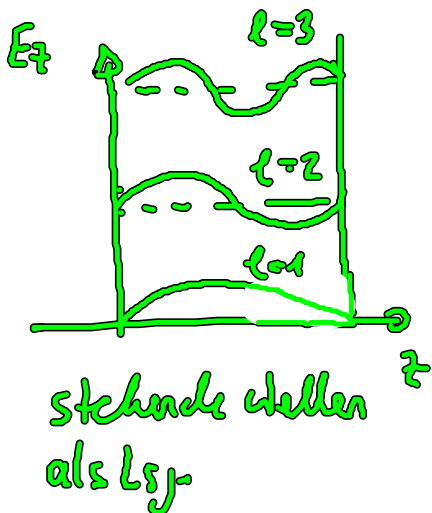
$\Rightarrow$  Dispersionsrelation

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{\ell}{d} \right)^2 \right]$$

Bestimmungsgl. für die Frequenz der EMW  
Wellen, die in einem Resonator gespeichert  
werden können  $\hat{=}$  Eigenfrequenzen  $\omega_\lambda$  bzw.

Moden  $\lambda$  des Resonators

$$\lambda = (m, n, \ell)$$



$$\vec{E}_t = -i \frac{k_z E_0}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \sin\left(\ell \frac{\pi}{d} z\right)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin\left(\ell \frac{\pi}{d} z\right) e^{-i\omega t}$$



Wichtigste Anwendung: Laser

In der Praxis wird der Resonator so gebaut, dass er möglichst nur die resonante Frequenz des optischen Mediums enthält.

---

Elektrodynamik VL - kurzer Überblick

→ Gesamtheit aller e.m. Phänomene → Maxwell-Gl.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \dot{\vec{E}} + \vec{j}$$

→ Zeitabh. Lsg. der Maxwell-Gl. sind fortschreitende Wellen  $f(k \cdot r \pm \omega t)$

→ Ebene Wellen sind Lsg. der Maxwell-Gl.  
 $e^{i(k \cdot r - \omega t)}$

Lösungen über homogene Wellengl.

$$\square \varphi(r, t) = 0$$

Jeder Punkt von  $E, B$  erfüllt diese

→ Elektromagnetische Potentiale

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \dot{\underline{A}}$$

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A}$$

gekoppeltes System von 4  
partiellen DGL 1. Ordnung

↓ Potentiale

2 partielle DGL 2. Ordnung

Eichfreiheit: Coulomb-Eichung, Lorenzeichung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$$

$$\text{div } \underline{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} = 0$$

→ Multipolenentwicklung bei einer räumlich begrenzten  
Ladungsverteilung → Dipolmoment, Quadrupolmoment

→ Makroskopische Maxwellgleichungen  
Einfluss der Materie

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{D} = \underline{\rho}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}, \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{\partial}_t \underline{D} + \underline{j}$$

Einführung von i) dielektrischem Verschiebungsfeld

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

ii) magnetische Feldstärke

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} (\underline{B} - \underline{M})$$

→ Materialgleichungen

Maxwellgl. benötigen Input;  $\rho, \vec{j}, \vec{P}, \vec{M}$

Ohmsches Gesetz  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

lineare Medien  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

→ Randwertprobleme

Stetigkeitsbed.: Maxwell + Satz von Gauß und Stokes

$$i) (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0$$

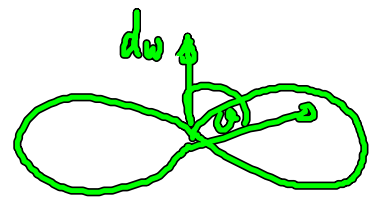
$$ii) (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

$$iii) (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_F \quad \text{Flächenladungsdichte}$$

$$iv) (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_F \quad \text{Flächenstromdichte}$$

→ Erzeugung von Wellen; zeitl. veränderliche Quellen

Dipolstrahlung  $S \sim d_{\omega}^2 \sin^2 \theta$   
Poynting Vektor



→ Ausbreitung in Materie

Absorption  $|E|^2 \sim e^{-\kappa z}$

Reflexionsgesetz, Brechungsgesetz

Fresnelsche Gleichungen

→ Rayleigh Streuung  $S \sim \omega^4$

Wirkungswirkung

→ Fraunhofer Beugung  
Skalare Beugungstheorie  $|E(\theta)|^2 \sim \left| \frac{\sin x}{x} \right|^2$

→ Geometrische Optik  
Strahlengang in inhomogenen Medien (Eikonaltheorie)

→ Führung und Spieglung von eum Wellen

im Januar:

→ Relativistische Elektrodynamik

→ Quantisierung des Lichts