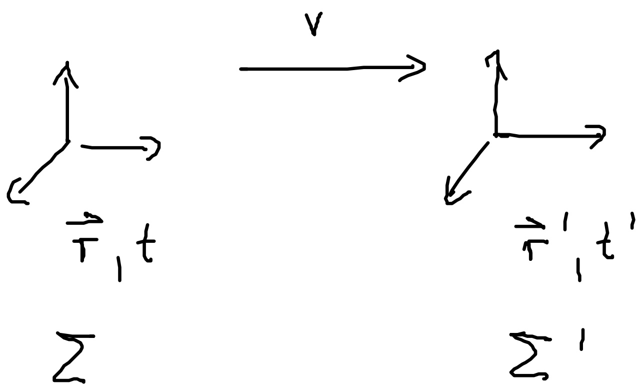
12.) Relativistische Elektrodynamik

12.1.) Wiederholung: Lorentztransformation, Viererschreibweise



spezielle Relativitätstheorie (Mechanik) untersucht Effekte bei Bewegung Σ' bzgl Σ, $v \lesssim c$

Raum-Zeit-Koordinate

$$\vec{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \equiv x^\mu$$

$$\vec{x}' = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z') \equiv x'^\mu$$

Index oben ≙ „kontravariante Vektoren"

Index unten ≙ „kovariante Vektoren": $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$

$\Sigma' \hat{=}$ mitbewegt. KS , $\Sigma \hat{=}$ Laborsystem

man kann zwisch. Σ, Σ' umrechnen mit Lorentztransformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bewegg. entlang x-Richtg.

$$\underbrace{\beta = \frac{v}{c} \, , \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}}$$

Def. in d. Matrix, Lorentzfaktor γ

$\rightarrow$ „Vorzeile mal Nachspalte" gibt:

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \, , \quad x' = \gamma(-v \cdot t + x)$$

$$y = y' \, , \quad z = z'$$

Zeile

geschickter: $\quad X'^{\mu} = \Omega^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}$

Summe über Spalte·Zeile

griechische Indices : 0 - 3 (alle)

lateinische Indices : 1 - 3 (Ort)

Einstein Summenkonvention: über Ko- und Kontra wird bei gleichen Indizes (ν) summiert

Umkehrtrafo :

$$x^{\mu} = \text{"}\bar{\Omega}\text{"}^{\mu}_{\ \nu}\, x'^{\nu} \qquad \underbrace{(v \to -v)}$$

wichtige Begriffe

a) Vierervektoren : Ein 4er Vektor ist ein Vektor A^{μ} der sich beim Wechsel der KS wie der Vektor x^{μ} transformiert : $x'^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$, also wie

$$A'^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\ \nu} A^{\nu}$$

b) Lorenzskalar : Eine skalare Größe die sich beim Wechsel d. KS nicht verändern heißt Lorentzskalar.

- Die Masse ist kein Lorenzskalar $m = m(v)$.
- Die Ladung ist ein Lorenzskalar (später).

- Norm v. Vierrektoren ist ein Lorentzskalar:

$$\|A\|^2 = A'^{\mu} A'_{\mu} = \Omega^{\mu}_{\ \nu} A^{\nu} \omega_{\mu}^{\ \alpha} A_{\alpha} \overset{!}{=} A^{\mu} A_{\mu}$$

LT für die kovariant Indizes

zuzeigen!

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (x_i \to -x_i)$$

$$\underbrace{\Omega^{\mu}_{\ \nu}\, \omega_{\cdot\mu}^{\ \alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu}}_{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}$$ zeige durch Ausrechnen

diese Matrixidentität führt auf die Invarianz der Norm bzgl. KS-Wechsel.

c) <u>Lorentztensor oder kontravarianter Tensor</u>

Eine Matrix $F^{\mu\nu}$ die sich unter Wechsel des KS

wie die Größe $F'^{\mu\nu} = \Omega^{\mu}_{\ \alpha} \Omega^{\nu}_{\ \beta} F^{\alpha\beta}$ heißt

Lorentztensor.

Beispiel: elektromagnetische Feldtensor, dessen Komponenten E^i, B^i sind.

12.2. Formulierung der relativistischen Elektrodynamik

vergangenes Vorgehen

1) Newtonmechanik: $\Rightarrow$ Inertialsysteme sind KS in denen die Newtongleichungen gelten

$\Rightarrow$ Galileitrafo zum Umrechnen

2) aufgrund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit kam es zu einer verbesserten Formulierung der Newtongleichung $\rightarrow$ Einsteingleichung mit Viererimpuls, Viererkraft,

$\Longrightarrow$ neue Def. der IS: Einsteinformulierung gilt

$v \to 0 \Rightarrow (1)$

3) Maxwellgleichungen haben konstante Lichtgeschwindigkeit eingebaut $\Longrightarrow$ Formulierung:

Inertialsystem sind KS in den die Maxwellgl. gelten

(sollte mit (2) konsistent! sein und darf sich nicht widersprechen)

Was kann man gewinnen wenn die Maxwellgleichg. sowieso schon stimmen:

- Berechnungsvorschrift f. Wechsel v. KS wenn man Strom/Ladungsdichte bzw $\vec{E}/\vec{B}$ in Σ' berechnen möchte ($\Sigma \to \Sigma'$)

- Form der Maxwellgleichg. die in allen Koordinatensystem gilt („kovariante Formulierg"), Vierschreibweise („Schönheit") (kompakte Schreibweise!)

- Anwendg. einfach: Bremsstrahlungsemission

12.3. Kontinuitätsgleichg. u. Viererstrom

Vierer formulierung soll liefern $\vec{E}', \vec{B}' \leftrightarrows \vec{E}, \vec{B}$

$\vec{j}', \rho' \qquad \vec{j}, \rho$

wissen in Σ, Σ' gilt jeweils die Maxwellgleichung.

$\swarrow \qquad \searrow$

$\vec{E}(\vec{r}, t) \qquad \vec{E}'(\vec{r}', t')$

Aus den Maxwellgleichungen kann man Kontinuitätsgleichung in Σ, Σ' ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 = \frac{\partial}{\partial t'} \rho' + \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}'$$

denn: $\underline{\text{in } \Sigma}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} = \underbrace{\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon_0}} \quad , \quad 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

das gilt genauso $\underline{\text{in } \Sigma'}$

Vierschreibweise der Kontinuität:

$$\frac{\partial c\rho}{\partial ct} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} j^i = 0$$

mit $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, j^1, j^2, j^3)$

0-te Kompon.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$$

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha = 0}$$

Kontinuitätsgleich. in Vierer Schreibweise

∂_μ ist ein Vierervektor :

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Omega^\nu_{\ \mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

ist zu zeigen !

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Omega^\nu_{\ \alpha} x^\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

Kettenregel f. $x' = x'(x)$

$\delta_{\alpha\mu}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Omega^\nu_{\ \mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}}$$

transformiert sich wie Vierervektor

- der Viererstrom j^α ist ein Vierervektor:

Start v. Kontinuitätsgleichg.

Annahme daß durch LT ungeändert

$$\partial_{\mu'} j^{\mu'} = \partial_{\mu'} \Omega^\mu_{\ \nu} j^\nu \stackrel{!}{=} \partial_\mu j^\mu$$

zu zeigen

$$= \Omega^\mu_{\ \nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} j^\nu(x) = \sum_\alpha \Omega^\mu_{\ \nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\nu(x)$$

Kettenregel

$$= \underbrace{\Omega^\mu_{\ \nu} \bar{\Omega}^\alpha_{\ \mu}}_{\delta^\alpha_\nu} \partial_\alpha j^\nu(x) = \partial_\alpha j^\alpha = \partial_\mu j^\mu$$

$\longrightarrow$ Nablaoperator ∂_α und j^α sind Vierervektoren und können bei KS-Wechsel mit der LT umgerechnet werden

12.4. Analogie Mechanik – ED

$$\Sigma \rightarrow \Sigma'$$

Mechanik		Elektrodynamik
$x' = (x - vt)\gamma$	$\Longleftrightarrow$	$j_x' = (j_x - v\rho)\gamma$
$ct' = (ct - \frac{v}{c}x)\gamma$		$c\rho' = (c\rho - \frac{v}{c}j_x)\gamma$

Umrechng. v. Strom u. Ladungsdichte von $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

$\hat{=}$ Umrechng. von Ort / Zeit von $\Sigma \rightarrow \Sigma'$.

durch die Umformulierung in die Viererschreibweise findet man die Umrechenformeln

wissen aus Mechanik: Masse ist kein Lorentzskalar $m = m(v)$

Elektrodynamik hat Ladung als zentrale WW-Stärke

man kann zeigen, daß Ladung ein Lorentzskalar ist:

$$\Sigma \xrightarrow{v} \Sigma'$$

Punktladung beweg.: ruht in Σ, bewegt sich mit v in Σ'

$j = (c\rho, 0)$ ruhende Ladung, kein Strom

$j' = (c\rho', \underline{\underline{v\rho'}})$

ρ, ρ' - Ladungsdichte der Punktladung.

j ist Vierervektor $\longrightarrow$ ich kann ein- und umrechnen:

$j' = \underline{\underline{\gamma}}(c\rho, \underline{\underline{v\rho}}) \Rightarrow$

Lorentzfaktor durch Lorentztrafo

$\Rightarrow \gamma v \rho = v\rho'$, Def. der Ladungsdichte

$$\gamma \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ'}{dV'} \longrightarrow dQ = dQ'$$

$\to \frac{d}{dV'}$

Längenkontraktion

Die Ladung ist in beiden Systemen identisch, also ein Lorentzskalar.