

# Elektronenquantisierung (1)

Zusatz I:

Semiklassische Quantentheorie der Wechselwirkung von Licht und Materie

1 Quantisierung von Ladungsträgern und makroskopische Mittlung

Bestes Konzept: Zweite Quantisierung, führt zu weit,  
verwenden eine didaktische Vereinfachung:

elektronische Ladungsdichte  $\rho(r, t)$  über Wahrscheinlichkeitsdichte darstellen  
(q: Ladung)  $\Psi$  Wellenfunktion eines Elektrons (zB. Einelektron-Atom)

$$\rho(r, t) = q\Psi^*(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t)$$

mit Ansatz aus QM:  $\Psi = \sum_m c_m(t)\varphi_m(r)$ , wobei:

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{freies bzw. gebundenes Elektron}} + \underbrace{H_{\text{EI-Feld}}}_{\text{EI-Feld Wechselwirkung}}, \quad H_0\varphi_m = \epsilon_m\varphi_m \text{ (z.B. H-Atom Lösungen)}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \rightarrow q\Psi^*\Psi = q \sum_{m,m'} c_m^*(t)c_{m'}(t)\varphi_m^*(\mathbf{r})\varphi_{m'}(\mathbf{r})$$

Elektron mit Ladung q

$$\text{Mittelung: } \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = q \sum_{m,m'} c_m^*(t)c_{m'}(t) \int d^3r' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi_m^*(\mathbf{r}')\varphi_{m'}(\mathbf{r}')$$

## Elektronenquantisierung 2

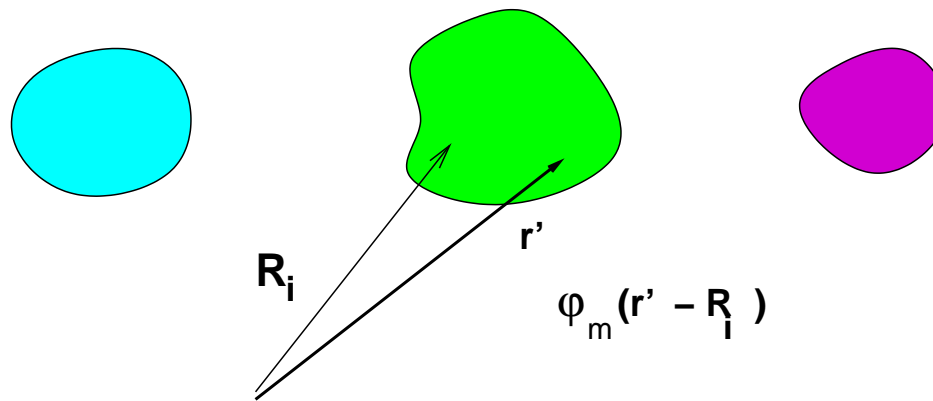
Mittlung am Bsp. gebundener Ladungen:

Wellenfunktion  $\varphi_m(r)$  (Einelektronenorbital)

$g$  mittelt über ein Molekül analog klassischer Physik

Elektronenkoordinate wird dargestellt mit  $\mathbf{r}'$

$\mathbf{R}_i$ : Ort des  $i$ -ten Atoms (Moleküls)



$$\begin{aligned}\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle &= q \sum_{m, m'} c_m(t)^* c_{m'}(t) \int d^3 r' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_i \varphi_m^*(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \varphi_{m'}(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \\ &= q \sum_{m, m', i} c_m^*(t) c_{m'}(t) \int d^3 r' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_{m'}(\mathbf{r}')\end{aligned}$$

weil die Wellenfunktion stark mit  $|\mathbf{r}'|$  abfällt und das Integral abschneidet macht man nur einen kleinen Fehler wenn man  $g$  nach kleinen  $|\mathbf{r}'|$  entwickelt

# Elektronenquantisierung 3

Taylorreihe:

$$\approx q \sum_{m,m',i} c_m^* c_{m'} \underbrace{\int d^3 r' \varphi_m^*(\mathbf{r}') \varphi_{m'}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)}_{\delta_{m m'}}$$

$$q \sum_{m,i} |c_m|^2 g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = q \sum_i g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = \rho_m(r),$$

makroskopische EI-Dichte  $\rho_m$  am Ort  $\mathbf{r}$  wird durch Ionen kompensiert

$$- q \sum_{m,m',i} c_m^* c_{m'} \int d^3 r' \varphi_m^*(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \varphi_{m'}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_r g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$$

$$- \sum_{m,m',i} c_m^* c_{m'} \mathbf{d}_{m m'} \cdot \nabla_r g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_m(\mathbf{r}, t) - \nabla_r \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \text{Quadrupolanteile} \approx -\nabla_r \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

folgt durch Vergleich mit Klassik,  
 $\rho_m = 0$ , weil durch Ionen kompensiert.

## Elektronenquantisierung 4

$$\mathbf{d}_{m m'} = q \int d^3 r' \varphi_m^*(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \varphi_{m'}(\mathbf{r}')$$

Dipolmoment des Moleküls/Atoms zwischen Zustand  $m, m'$ .

QM- Übergangsamplitude zwischen  $m, m'$  erzeugt Dipoldichte  $\mathbf{P}$

$\mathbf{P}$  : quantenmechanische Dipoldichte

$$= \sum_{i, m, m'} c_m^*(t) c_{m'}(t) \mathbf{d}_{m, m'} g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$$

als Summe über alle Atome an den Positionen  $R_i$   
mit Dipolmomenten  $d_{mm'}$  und den zeitabhängigen  
Wahrscheinlichkeitsamplituden  $c_m^*(t)c_{m'}(t)$  die Zeitverlauf der  
Quantendynamik beschreiben

zB: 1 Atom bei  $R_i = 0$  und  $g$  als stark lokalisiert auf mesoskopischer Ebene:  
 $g(R_i + r) \approx \delta(r)$

Analog kann der Strom beschrieben werden (ohne Vorrechnen):

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_m + \partial_t \mathbf{P} + \quad \text{Magnetisierung/Quadrupolanteile}$$

## Bewegungsgl. f. die Ladungen 5

### 2. Quantenmechanische Bewegungsgleichungen für gebundene Elektronen

$H_{WW} = q\Phi(r) = -qrE(R_i)$ , wenn  $E(R_i) = -\nabla_r\Phi(r) = -\nabla_r(-rE(R_i))$ .

In quantenmechanischer Beschreibung:  $c_m(t)$  (m: 1-N Niveaus) gesucht,  $\sum_i$  weglassen, später dazu.

$$i\hbar\dot{\varphi} = \mathbf{H}\varphi, \quad \text{mit } \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{WW}, \quad \mathbf{H}_0\varphi_n = \epsilon_n\varphi_n, \quad H_{WW} = -q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_i)$$

Ansatz:  $\varphi = \sum_{n=1}^N c_n(t)\varphi_n(\mathbf{r}) \hat{=} \text{N-Niveau System am Ort } R_i$

$$i\hbar \sum_n \dot{c}_n \varphi_n(\mathbf{r}) = \sum_n c_n(t) \mathbf{H} \varphi_n(\mathbf{r})$$

Multipl. mit  $\varphi_m^*(\mathbf{r})$  und Int. über den Raum ( $\int d^3r$ )

$$i\hbar\dot{c}_m(t) = \sum_n c_n(t) \mathbf{H}_{mn}$$

$$\mathbf{H}_{mn} = \int d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r}) \mathbf{H}_0 \varphi_n(\mathbf{r})$$

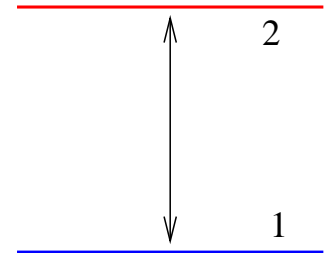
$$= \underbrace{\int d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r}) \mathbf{H}_0 \varphi_n(\mathbf{r})}_{\epsilon_n \delta_{nm}} - q \underbrace{\int d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \varphi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(R_i)}_{\mathbf{d}_{mn} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_i)}$$

## Bewegungsgl. f. die Ladungen (6)

$$\mathbf{d}_{mn} = q \int d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \varphi_n(\mathbf{r}) \quad \text{Dipolmoment des Atoms/moleküls}$$

Zur besseren Interpretation : 2-Niveaus,  $d_{12} = d_{21}^*$

Zweiniveausystem am Ort  $R_i$



$$i \hbar \dot{c}_2(t) = \epsilon_2 c_2(t) - \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E} c_1(t)$$

$$i \hbar \dot{c}_1^*(t) = -\epsilon_1 c_1^*(t) + \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E} c_2^*(t)$$

$$i \hbar \frac{d}{dt} (c_1^* c_2) = -(\epsilon_1 - \epsilon_2) c_1^* c_2 - \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E} (c_1^* c_1 - c_2^* c_2)$$

$c_1^* c_2 = \rho_{12} \hat{=}$  Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude von 1 nach 2

1.Term: freie Bewegung, 2.Term: Felder als Quellen des Übergangs

$c_1^* c_1 = \rho_{11} \hat{=}$  Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands 1, 2 analog

## Bewegungsgl. f. die Ladungen (7)

- Interpretation von  $\rho_{ii}$  (Gleichungen später) als Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands  $i$

-  $c_1^* c_1 - c_2^* c_2$  entspricht Pauli-Blocking (Fermionen!)  $\rightarrow c_2^* c_2 > 0$  verringert die Ankopplung an Licht

- für Gleichbesetzung ( $\rho_{11} = \rho_{22}$ ) ergibt keine Ankopplung an das Lichtfeld (hier sind induzierte Emission und Absorption sind gleich!) - optische Verstärkung ergibt sich für  $\rho_{11} < \rho_{22}$

für viele Atome an Positionen  $\mathbf{R}_i$  u. homogener Dipoldichte  $\mathbf{P}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \sum_i \mathbf{d}_{12} \rho_{12}^i(t) g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) + c.c. \\ &= 2\text{Re} \left[ \mathbf{d}_{12} \frac{N_0}{\Omega_0} \rho_{12}(r, t) \right] = 2\text{Re} [\mathbf{d}_{12} n_0 \rho_{12}(r, t)]\end{aligned}$$

$\Omega_0 =$  Mittlungsvolumen,  $g = \text{constant}$

$N_0 =$  Zahl der atomaren Systeme in  $\Omega_0$

$n_0 =$  Anzahldichte der atomaren Systeme,  $n_0 = N_0/\Omega_0$

entsteht eine Gleichung mit Ortsabhängigkeiten:

$$\dot{\rho}_{12}(r, t) = i \omega_{12} \rho_{12}(r, t) + i \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}(r, t) (\rho_{11}(r, t) - \rho_{22}(r, t))$$

## Bewegungsgl. f. die Ladungen (8)

### Grenzfall der linearen Optik:

$\Delta = \rho_{11} - \rho_{22} =$  festgehalten, wird nicht von  $\mathbf{E}$  getrieben, sonst wäre dieser Term von  $\mathbf{E}$  abhängig und damit die Antwort nichtlinear

Real, Imaginärteil:

$$\dot{\rho}_{12}^R = -\omega_{12}\rho_{12}^I$$

$$\dot{\rho}_{12}^I = \omega_{12}\rho_{12}^R + \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}\Delta$$

$$\ddot{\rho}_{12}^R = -\omega_{12}\dot{\rho}_{12}^I$$

$$= -\omega_{12}^2\rho_{12}^R - \omega_{12}\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}\Delta$$

$$\ddot{P} = -\omega_{12}^2 P - \gamma_0 \dot{P} - 2\omega_{12}|\mathbf{d}_{21}|^2 n_0 \mathbf{E}\Delta$$

stellt die Gleichung für die Dipoldichte  $P$  dar

entspricht FAST klassischem Oszillatorergebnis

allerdings jetzt alle Kopplungen quantenmechanisch bestimmt und es gibt die neue Grösse  $\Delta$  die man nur quantenmechanisch verstehen kann



## Bewegungsgl. f. die Ladungen (9)

Definition der linearen Suszeptibilität  $\chi$  im Frequenzraum

$$P(r, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(r, \omega)$$
$$\chi(\omega) = \frac{2\omega_{21} |d_{21}|^2 n_0}{\varepsilon_0} \frac{\Delta}{-\omega^2 + \omega_{12}^2 - i\omega\gamma_0}$$

erinnert an klassischen harmonischen Oszillator

Ergebnis wird aber mit  $\Delta = \rho_{11} - \rho_{22}$  (*Inversion*) multipliziert, dieser Faktor ist nichtklassisch und bewirkt bei stärkerer Besetzung des oberen Niveaus im Vergleich des oberen Niveaus einen Vorzeichenwechsel und damit den Wechsel von Absorption ( $\text{Im } \chi > 0$ ) zu Verstärkung  $\text{Im } \chi < 0$ ! (stimulierte Emission), siehe späteres Kapitel

ist essentiell für den Laserprozess und optische Verstärkung!!

## 3. Abstrahlung gekoppelter atomarer Systeme: Strahlungsdämpfung und Superradianz

- betrachten eine Ansammlung von strahlungsfähigen Dipolssystemen (Antennen, atomare Systeme)
- durch die Abstrahlung von Energie muß Dipolschwingung abklingen (Energieerhaltung), dieser Dämpfungsmechanismus wird Strahlungsdämpfung genannt

- Rechnung erfolgt im Fourierraum:  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{d}_{12}^i \rho_{12}^i(\omega) g(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$

Summe über alle strahlenden Systeme  $i$  mit Dipolmoment  $\mathbf{d}_{12}^i$  und der Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude  $\rho_{12}^i(\omega)$ .  $g(\mathbf{r})$  ist die Funktion, die über den Raum mittelt, die Verteilung der atomaren Systeme sei in Volumen  $\ll \lambda^3$

- $-i\omega \rho_{12}^i(\omega) = -i\omega_{21} \rho_{12}^i(\omega) + i\mathbf{d}_{21}^i \mathbf{E}_i(\omega) / \hbar, \quad -\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\hbar} > 0$

ist die Gleichung für die Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude im Fourierraum,  $\mathbf{E}_i$  ist das elektrische Feld am  $i$ -ten Dipol, muß aus Maxwellgleichungen berechnet werden,

- bisher alles für  $\Delta \approx 1$  (lineare Optik)

# Strahlungsdämpfung und Superradianz (11)

- Weiterhin gilt die Wellengleichung, die den Abstrahlungsprozeß beschreibt:

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) \right\}$$

$$\phi(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}', \omega) \right\}$$

$$\mathbf{E} = i\omega \mathbf{A} - \nabla \phi = \int d^3 r' \left( i\omega \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} (-i\omega \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega)) + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \rho_{12}^i(\omega) \int d^3 r' \left[ \left( 1 + \frac{c^2}{\omega^2} \nabla \nabla \cdot \right) \mathbf{d}_{12}^i g(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \right] \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Da alle Systeme  $i$  in einem Volumen kleiner  $\lambda^3$  sind, kann man für alle Systeme ein identische Dynamik voraussetzen:

$\rho_{12}^i = \rho_{12}$  weiterhin  $\mathbf{d}_{12}^i = \mathbf{d}$  (identische Dipole annehmen)

$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 1$ , weil wir kleine Volumen des atomaren Systeme gegen die Wellenlänge annehmen, Taylorreihe der Exponentialfunktion

## Strahlungsdämpfung und Superradianz (12)

Nehmen nur den ersten Anteil der Summe rechts weiter mit (didaktische Vereinfachung).

Der erste Term der Taylor-Entwicklung ist eine Realteil in den Bewegungsgleichungen und beschreibt i.a. einen unendlich grossen Energieshift, ist allgemeines Problem der ED mit Punktteilchen (bis heute in QED: weglassen von Unendlichkeiten (Renormierung)!).

Der 2. Term der Taylor-Entwicklung dieses Beitrags einen Imaginärteil, dieser bringt später eine neue Struktur in die Materialgleichungen, den nehmen wir mit!

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \approx \frac{ik\omega^2 \mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{12} \rho_{12}(\omega) \sum_i \int d^3 r' [g(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_i)]$$

( Annahme: alle Systeme am Koordinatenursprung  $R_i = 0$  )

$$\sum_i = N_0, \quad N_0 : \text{Anzahl der atomaren Systeme}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{\omega^3 \mu_0}{4\pi c} N_0 \mathbf{d}_{12} \rho_{12}(\omega)$$

## Strahlungsdämpfung und Superradianz (13)

Einsetzen des Felds in die  $\rho_{12}$  Gleichung:

$$-i\omega\rho_{12}(\omega) = i\omega_{21}\rho_{12}^i - \frac{\omega^3\mu_0 N_0}{4\pi c\hbar} |\mathbf{d}_{12}|^2 \rho_{12}(\omega)$$

Die Gleichung für die Übergangsamplitude läßt sich daher im Zeitraum schreiben als:

$$\partial_t \rho_{12}(t) = -i\omega_{21}\rho_{12}(t) - \gamma_{\text{rad}}\rho_{12}(t)$$

$$\gamma_{\text{rad}} = N_0\gamma_{\text{rad}}^0, \quad \gamma_{\text{rad}}^0 = \frac{d_{12}^2\omega_{21}^3\mu_0}{4\pi c\hbar}$$

wobei  $\omega \approx \omega_{21}$  gesetzt wurde um die FT zu ermöglichen (Resonanzapproximation).

man erkennt eine gedämpfte Schwingung

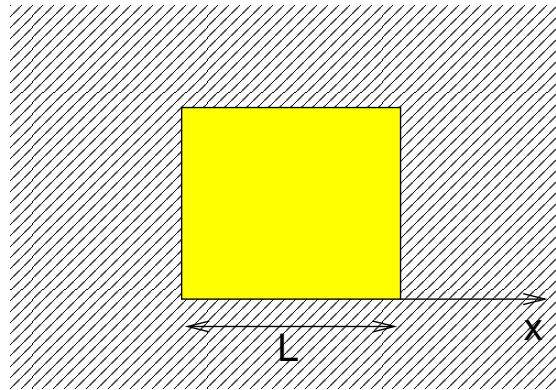
typisches atomares  $\gamma_{\text{rad}}^0 = \frac{1}{10^{-6} - 10^{-9} \text{ s}}$  für einen atomaren Übergang

## Strahlungsdämpfung und Superradianz (14)

- wenn also der atomare Oszillator Licht abstrahlt, so muss die Oszillation Energie verlieren, dies wird durch die Dämpfung  $\gamma^0$  beschrieben ist proportional zum Dipolmoment hoch 2 und zu Schwingungsfrequenz hoch 3.
- Quanten-ED: mittlere Zeit für Emissionsvorgang (Photonabstrahlung) ist  $\gamma_{\text{rad}}^0$ , diese Rate entspricht dem Einsteinkoeffizienten für die spontane Emission
- die Dämpfung der Schwingungsamplitude  $\rho_{12}$  der atomaren Systeme, in einem Volumen kleiner als  $\lambda^3$ , ist proportional zu Anzahl der Systeme  $N_0$  (Superradianz=erhöhte Wahrscheinlichkeit der Abstrahlung pro Zeit, weil sich  $N_0$  Oszillatoren in der Phase überlagern, gilt auch für Antennen)
- oftmals werden mehrere Antennen aufgestellt um der superradiante Effekt auszunutzen, denn man kann zeigen, daß auch die Intensität der Emission um  $N_0^2$  und nicht nur um  $N_0$  erhöht wird

## 4. Theorie der Laseremission

### Aufbau:



Resonator mit Medium  
(zweiniveausystem)

Stehende Wellen zwischen Spiegeln  
(Abstand  $L$ ).

Zweiniveausystem mit  $\Delta_{12} = \rho_{11} - \rho_{22} < 0$   
(Inversion).

Spiegel sind durchlässig, um Laseremission  
nach außen zu ermöglichen.

### 3.1 Beschreibung des Lichts

Im Resonator:

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} E_{\lambda}(t) u_{\lambda}(\mathbf{r}), \quad P(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(t) u_{\lambda}(\mathbf{r})$$

$u_{\lambda}(\mathbf{r})$  sind die Moden, die der Resonator zulässt. Wir nehmen diese als  
bekannt an, z.B. im 1d-System:  $u_{\lambda} = \sin k_{\lambda} x$ ,  $k_{\lambda} = \lambda\pi/L$ ,  $\lambda = 1, 2, 3 \dots$   
(siehe Kap. zu Wellenleitern und Resonatoren)

## Beschreibung des Lichts (16)

Die Moden  $u_\lambda(x)$  sind ein vollständiges System im Resonator und befriedigen die Randbedingungen an idealen Metallen, zB 1d:

$$\partial_x^2 u_\lambda(x) - k_\lambda^2 u_\lambda(x) = 0 \quad (k_\lambda^2 c^2 = \omega_\lambda^2)$$

$$\partial_x^2 E - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E = \mu_0 \partial_t^2 P + \mu_0 \partial_t j$$

**P:** Dipoldichte (Zweiniveausysteme) **j:** Verluste an Spiegeln  
Behandlung der Wellengleichung:

- Modenentwicklung des Felds in  $\square E = \mu_0 \partial_t^2 P + \mu_0 \sigma \partial_t E$  einsetzen. Mit Hilfe Orthonormalität der Moden ( $\int d^3 r u_\lambda^*(r) u_{\lambda'}(r) = \delta_{\lambda\lambda'}$ ) eine Gleichung für Komponente  $E_\lambda(t)$  herleiten:

$$\partial_t^2 E_\lambda + \omega_\lambda^2 E_\lambda + \epsilon_0^{-1} \sum_{\lambda'} \sigma_{\lambda\lambda'} \partial_t E_{\lambda'} = -\epsilon_0^{-1} \partial_t^2 P_\lambda(t)$$

$$\sigma_{\lambda\lambda'} = \int d^3 r u_\lambda^*(r) \sigma(r) u_{\lambda'}(r) \approx \delta_{\lambda\lambda'} \sigma_\lambda, \text{ falls } \sigma(r) = \text{konstant}$$

$$\begin{aligned} P_\lambda(t) &= \int d^3 r u_\lambda^*(r) P(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r u_\lambda^*(r) \sum_i d_{12} \rho_{12}^i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + k.k. \\ &= \sum_i u_\lambda^*(r_i) \rho_{12}^i d_{12} + k.k. \end{aligned}$$



## Beschreibung des Lichts (17)

- Drehwellennäherung (Rotating wave approximation)  
Anteil mit  $e^{\mp i\omega_\lambda t}$  werden getrennt, man teilt die Wellengleichung in 2 Gleichungen, nach der Oszillationsfrequenz in der Gleichung für  $\rho_{12}$  ( $\sim e^{-i\omega_{21}}$ ) bzw.  $\rho_{21}$  ( $\sim e^{+i\omega_{21}}$ ), gibt 2 Gleichungen  $\pm$ :

$$\partial_t^2 E_\lambda^{(\pm)} + \omega_\lambda^2 E_\lambda^{(\pm)} + \epsilon_0^{-1} \sigma \partial_t E_\lambda^{(\pm)} = -\epsilon_0^{-1} \partial_t^2 P_\lambda^\pm$$

- Näherung der langsam veränderlichen Amplitude  $A_\lambda$   
(Slowly varying envelope)

$$E_\lambda^+ = A_\lambda(t) e^{-i\omega_\lambda t}, \quad |\partial_t A_\lambda(t)| \ll |\omega_\lambda A_\lambda|$$

$$\partial_t^2 E_\lambda^{(\pm)} + \omega_\lambda^2 E_\lambda^{(\pm)} = (\partial_t + i\omega_\lambda)(\partial_t - i\omega_\lambda) E_\lambda^\pm \approx (\partial_t + i\omega_\lambda)(-2i\omega_\lambda) E_\lambda^\pm$$

$$\partial_t^2 P_\lambda^\pm \approx -\omega_\lambda^2 P_\lambda^\pm$$

$$(\partial_t + i\omega_\lambda)(-2i\omega_\lambda) E_\lambda^+ + \epsilon_0^{-1} \sigma (-i\omega_\lambda) E_\lambda^+ = \epsilon_0^{-1} \omega_\lambda^2 P_\lambda^+$$

$$\partial_t E_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) E_\lambda^+ + i \frac{\omega_\lambda}{2\epsilon_0} P_\lambda^+, \quad \left( \kappa_\lambda = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right)$$

## Beschreibung des Lichts (18)

- Dimensionslose Größe für Lichtmoden  $b_\lambda$ :

$$E_\lambda^+ = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\epsilon_0}} b_\lambda,$$

$$\partial_t b_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda)b_\lambda + \frac{\omega_\lambda}{2\epsilon_0} \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\hbar\omega_\lambda}} \sum_i u_\lambda(r_i) \rho_{12}^i d_{12}$$

$$\partial_t b_\lambda = (-i\omega_\lambda - k_\lambda)b_\lambda - i \sum_i g_{\lambda i} \rho_{12}^i$$

ist die Gleichung für die Stärke einer Lichtmode  $\lambda$  im Resonator.

Der Kopplungsparameter  $g_{\lambda i}$  der Lichtmode mit dem  $i$ -ten Atom ist mit

$$i d_{12} \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\epsilon_0 \hbar}} u_\lambda^*(r_i) \text{ gegeben.}$$

Die erste beiden Terme auf der rechten Seite beschreiben die Oszillation und die Dämpfung der Mode im Resonator. Der nächste Term zeigt, daß die Dipolschwingungen  $d_{21}$  in der Materie (in den Atomen) diese Moden antreiben. Stellt inhomogene Differentialgleichung dar.

## 3.2 Beschreibung der Materie

erfolgt über die Bewegungsgleichungen der Zweiniveaumatome:

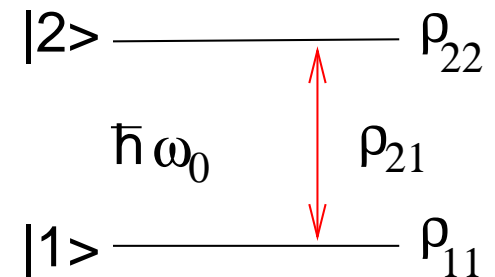
$$\partial_t \rho_{12}^i = (-i\omega_{21} - \gamma)\rho_{12}^i + id_{21}E_i(t)/\hbar(\rho_{11}^i - \rho_{22}^i),$$

$E_i(t)$ : Feld an der Stelle des Atoms  $i$

$\rho_{11}, \rho_{22}$ : Besetzungswahrscheinlichkeiten

$\rho_{21}, \rho_{12}$ : Übergangsamplituden

$\hbar\omega_{21}$ : Übergangsenergie



Interpretation: Oszillatorgleichung für Übergangsamplituden, das Licht treibt die Übergänge, Pauli-Blocking  $\Delta$  ist wirksam. Ankopplung nur an Übergänge zwischen elektronischen Niveaus mit nichtverschwindendem Dipolmatrixelement. Die Gleichungen für die Besetzungswahrscheinlichkeiten müssen abgeleitet werden, da diese bei der Laserbeschreibung wichtig sind. Die Lasergleichungen werden nichtlineare Differentialgleichungen sein.

## Beschreibung der Materie (20)

Umformung mit den normierten Feldamplituden

$$\partial_t \rho_{12}^i = (-i\omega_{21} - \gamma)\rho_{12}^i + i \frac{d_{21}}{\hbar} \sum_{\lambda} i u_{\lambda}(r_i) \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\lambda}}{2\epsilon_0}} b_{\lambda} (\rho_{11}^i - \rho_{22}^i)$$

$$\partial_t \rho_{12}^i = (-i\omega_{21} - \gamma)\rho_{12}^i - i \sum_{\lambda} g_{\lambda i}^* b_{\lambda} (\rho_{11}^i - \rho_{22}^i)$$

$\gamma$  : Dämpfungsmechanismus, strahlungslos, zB Phononen

Für die Inversion gilt:  $\Delta^i = (\rho_{11}^i - \rho_{22}^i)$

$$\partial_t \Delta^i = -2i \sum_{\lambda} (g_{\lambda i}^* \rho_{21}^i b_{\lambda}^* - g_{\lambda i} \rho_{12}^i b_{\lambda}) - (\Delta^i - \Delta_0)\Gamma$$

diese Gleichungen werden analog zu  $\rho_{12}^i$  zu Beginn Kap.X bestimmt, Beschreiben Kopplung der Inversion an das Lichtfeld und die Relaxation der Inversion zu einem Gleichgewichtswert (letzter Summand per Hand zugefügt), dabei ist  $\Delta_0$  ein durch externe Pumpe vorgegebener stationärer Wert, gegen den das System sich bewegt (mit der Zeit  $1/\Gamma$ ), wenn man die Lichtkopplung abschaltet ( $g = 0$ ):  $\Delta^i(t) = \Delta_0 + (\Delta^i(t=0) - \Delta_0)e^{-\Gamma t}$ . Bei einem Halbleiter-Laser ist dieser stationäre Wert durch den externen Pumpstrom gegeben.

### Diskussion der Gleichung für die Materialgleichungen:

a) **Übergangsamplituden**  $\rho_{12}^i$  ist Oszillatorgleichung mit der Oszillationsfrequenz  $\omega_{21}$  des atomaren Übergangs.

$\gamma$  stellt Dämpfung durch Ankopplung der Umgebung dar (Phononen).

Die Amplitude der Materieschwingung wird durch das Laserfeld (nach Moden  $\lambda$  entwickelt) getrieben: wird von den dominanten Moden die im Laserresonator überleben getrieben.

Das Vorzeichen des Treiberterms hängt von  $\Delta^i = \rho_{11}^i - \rho_{22}^i$  ab.

b) **Inversion**  $\Delta^i = \rho_{11}^i - \rho_{22}^i$  ist Besetzungsdifferenz durch die Besetzung des oberen Niveaus mit Elektronen.  $\Delta_{12}(t)$  ist eine quantenmechanische Grösse, durch ihre Existenz werden die Lasergleichungen nichtlinear in der Feldstärke macht (Effekt der Quantenmechanik, nichtlineare Optik).

$\Delta > 0$ , Elektron ist wahrscheinlicher im unteren Zustand,

$\Delta < 0$  wahrscheinlicher oben.

Die Nichtlinearität sieht man durch iteratives Einsetzen ohne Pumpe:

linear in  $\rho_{12}$  und  $\Delta = 1$ , dann Iteration der Gleichung für die

Besetzungsdifferenz (Inversion), geht mit  $E^2$  usw. .

# Lasergleichungen (22)

## 3.3 Lasergleichungen für den Einmodenfall

Annahme: nur eine Mode  $\omega_\lambda = \omega$  im Resonator relevant.

$g_{\lambda i} = g_\lambda$  sei reell und konstant (kann durch Phasenwahl der Wellenfkt. in  $d_{21}$  immer erreicht werden).

Definitionen:  $p = \sum_i \rho_{21}^i$ ,  $\Delta = \sum_i \Delta^i$ ,  $\Delta_0 \rightarrow N_0 \Delta_0$

$$\partial_t p = (-i\omega_{21} - \gamma)p - igb\Delta$$

$$\partial_t \Delta = -(\Delta - \Delta_0)\Gamma - 2ig(pb^* - p^*b)$$

$$\partial_t b = (-i\omega - \kappa)b - igp$$

Suche nach Lösung die genau mit Resonatormode schwingt:

$$p = p_0 e^{-i\omega t}, \quad b = b_0 e^{-i\omega t}, \quad \omega = \omega_{21}$$

$$\partial_t (b_0^* b_0) = -2\kappa (b_0^* b_0) - ig(b_0^* p_0 - p_0^* b_0)$$

Ratengleichungsnäherung:  $\gamma p \gg \partial_t p$  schnelle Relaxation,

“Versklavungsprinzip:”

$b_0(t)$  “versklavt” die schnell relaxierende Größe  $p_0(t)$   $p_0 = -ig \frac{b_0 \Delta}{\gamma}$ ,

$n = b_0^* b_0$ : Interpretation als Photonenzahl (prop. zur Intensität)  $n$ .

## Lasergleichungen (23)

einsetzen von  $p_0$  in die  $n$  Gleichung ergibt 2 Lasergleichungen:

$$\partial_t n = -2\kappa k n - n \frac{2g^2}{\gamma} \Delta,$$

$$\begin{aligned} \partial_t n &= -2\kappa n - n w \Delta, & w &= \frac{2g^2}{\gamma} \\ \partial_t \Delta &= -\Gamma(\Delta - \Delta_0) - 2n w \Delta \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen stellen die Ratengleichungen des Lasers für Photonzahl/Inversion dar.

$n(t)$ ,  $\Delta(t)$  müssen selbstkonsistent gelöst werden.

$w$  kann als die Rate mit der ein angeregtes Atom ein Photon pro Zeiteinheit erzeugt, interpretiert werden:

für konstantes  $\Delta$  und ohne Resonatorverluste folgt:  $n = n_0 e^{-w\Delta t}$ , 1 Atom mit  $\rho_{22} = 1$ ,  $\rho_{11} = 0$ ,  $\Delta = -1$ ), d.h. man sieht ein exponentielles Anwachsen des Felds in der Zeit  $w^{-1}$ .

### 3.3.1 Stationäre Lösungen

Aus  $\Delta$ -Gleichung:  $\Gamma(\Delta - \Delta_0) = -2nw\Delta$ ,  $\Delta = \frac{\Gamma\Delta_0}{\Gamma + 2nw}$

aus  $n$ -Gleichung:  $n(2\kappa + w\Delta) = 0$ ,  $n\left(2\kappa + \frac{w\Gamma\Delta_0}{\Gamma + 2nw}\right) = 0$

2 Lösungen  $n_{1/2}$ :  $n_1 = 0$  oder  $\left(2\kappa + \frac{w\Gamma\Delta_0}{\Gamma + 2n_2w}\right) = 0$

Für  $\Delta_0 < 0$  kann die zweite Lösung realisiert werden:

$$2\kappa(\Gamma + 2n_2w) = w\Gamma|\Delta_0|, \quad n_2 = \left(\frac{w|\Delta_0| - 2\kappa}{4\kappa w}\right) \Gamma$$

da  $n_2 > 0$ :  $2\kappa < w|\Delta_0|$   $|\Delta_0| > \frac{2\kappa}{w}$  Laserbedingung

Der gepumpte Gleichgewichtswert der Inversion  $\Delta_0 < 0$  muß groß genug sein, um die Verluste  $\kappa$  pro Zeiteinheit in der ein Photon abgestrahlt wird zu kompensieren.

Dann wird  $n \neq 0$  und es existiert ein Feld im Resonator.

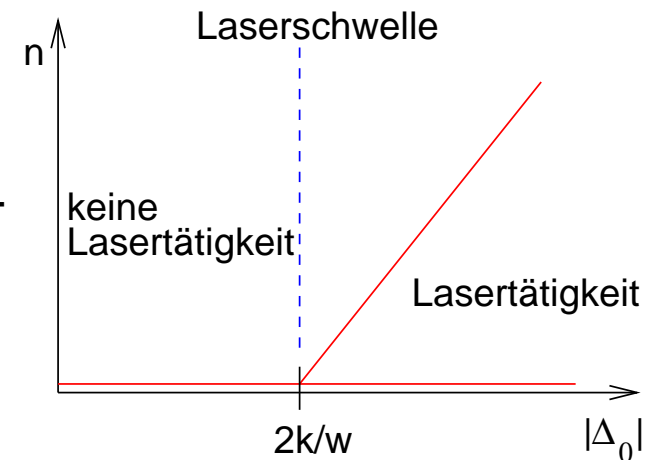


## Stationärer Betrieb (25)

Daher:

1. Unter einem kritischen Wert der Pumpleistung  $|\Delta_0|$  tritt keine Lasertätigkeit auf ( $n_1 = 0$ ).
2. Wenn die Pumpleistung  $|\Delta_0|$  den kritischen Wert überschreitet, so ist Lasertätigkeit  $n_2 \neq 0$ , also eine Intensität bzw. nichtverschwindende Photonenzahl im Resonator möglich.

Eigentlich muss die Lsg.  $n_1 = 0$  für  $|\Delta_0| > 2\kappa/w$  durch eine Lösung der zeitabhängigen Gleichung ausgeschlossen werden.



### 3.3.2 Dynamische Betrachtungen

#### a) Ratengleichung für $n$

kann für :  $d_t(\Delta - \Delta_0) \ll \Gamma(\Delta - \Delta_0)$  abgeleitet werden (schnelle Relaxation von  $\Delta \rightarrow \Delta_0$ , Versklavung durch langsame Feldamplitude  $b_0$ ):

$$\Gamma(\Delta - \Delta_0) = -2nw\Delta, \quad \Delta = \Delta_0 - \frac{2nw\Delta}{\Gamma}, \quad \Delta = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{2nw}{\Gamma}}$$

Einsetzen in die Photonenzahlgleichung:

$$\dot{n} = -2\kappa n - nw \frac{\Delta_0}{1 + \frac{2nw}{\Gamma}}$$

Für kleine  $n$  gilt dann die folgende Ratengleichung:

$$\dot{n} = (-2\kappa - w\Delta_0)n + \frac{2w^2\Delta_0n^2}{\Gamma}$$

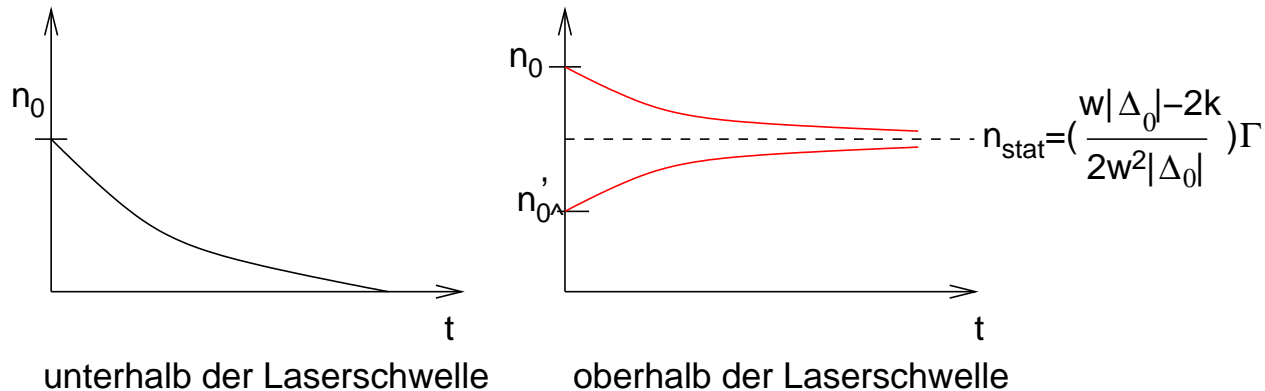
Aus dem ersten Term erhält man für eine im Resonator vorgegebene Photonenzahl  $n(t=0) = n_0$ :  $n = n_0 e^{(-2\kappa + w|\Delta_0|)t}$  was oberhalb der Laserschwelle eine anwachsende Photonenzahl bewirkt (stimulierte Emission kompensiert die Verluste) oder man erhält unterhalb der Laserschwelle  $n \rightarrow 0$  im Verlauf der Zeit, da die Verluste überwiegen.

## Dynamische Betrachtungen (27)

### Prinzip der zeitabhängigen Lösungen:

Unterhalb der Schwelle werden spontan vorhandene Photonen verbraucht, dh aus dem Resonator emittiert.

Oberhalb der Laserschwelle werden spontan entstandene Photonen stimuliert verstärkt und es stellt sich im Verlauf ein stationärer Wert  $n_{\text{stat}}$  ein. Kann von oben oder unten erreicht werden.



Bisher leider der Startprozess über spontane Photonen (spontane Emission) nicht in der Theorie enthalten. Dazu müsste das Strahlungsfeld noch quantisiert werden.

## Dynamische Betrachtungen (28)

b) volle Dynamik:

Stabilitätsanalyse und Relaxationsoszillationen für  $\Delta$  und  $n$

Frage: Kleine Abweichungen von deren stationären Zustand haben welche Auswirkung? Wird der stationäre Zustand wiederhergestellt? Jetzt keine Ratengleichungsnäherung für die Inversion.

$$n = n_{\text{stat}} + \delta n(t), \quad \Delta = \Delta_{\text{stat}} + \delta \Delta(t)$$

$$n_{\text{stat}} = n_2 = \Gamma \frac{w|\Delta_0| - 2\kappa}{4\kappa w}, \quad \Delta_{\text{stat}} = \frac{\Gamma \Delta_0}{\Gamma + 2n_{\text{stat}}w}$$

nichtlineare Korrekturen  $\delta n \delta \Delta \rightarrow 0$   
Einsetzen in Lasergleichungen.

## Dynamische Betrachtungen (29)

$$\partial_t n = -2\kappa n - nw\Delta, \quad \partial_t \Delta = -\Gamma(\Delta - \Delta_0) - 2nw\Delta$$

$$\partial_t \delta n = -2\kappa(n_{\text{stat}} + \delta n(t)) - (n_{\text{stat}} + \delta n(t))(\Delta_{\text{stat}} + \delta\Delta(t))w$$

$$\partial_t \delta n = -2\kappa\delta n - (n_{\text{stat}}\delta\Delta + \Delta_{\text{stat}}\delta n)w$$

weil die stationäre Lösung verwendet werden kann

$$\partial_t \Delta = -\Gamma(\Delta_{\text{stat}} - \Delta_0) - \Gamma\delta\Delta - 2w(n_{\text{stat}} + \delta n)(\Delta_{\text{stat}} + \delta\Delta)$$

$$\partial_t \Delta = -\Gamma\delta\Delta - 2w(n_{\text{stat}}\delta\Delta + \Delta_{\text{stat}}\delta n)$$

$$\partial_t \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\kappa - w\Delta_{\text{stat}} & -n_{\text{stat}}w \\ -2w\Delta_{\text{stat}} & -\Gamma - 2wn_{\text{stat}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta\Delta \end{pmatrix}$$

lineares Gleichungssystem, Eigenwerte der Matrix können berechnet werden, diese ergeben dann zeitlich abklingende Kurven (negativer Realteil von  $\lambda$ ) mit Oszillationen (Imaginärteil von  $\lambda$ ) für  $\delta n$ .

## Beschreibung der Materie (30)

Die auftretenden Oszillationen heißen Relaxationsoszillationen. Sie beschreiben die Relaxation von  $n(t)$ ,  $\Delta(t)$  in dem stationären Laserzustand bei grossen Photonenzahlen wenn man zu Beginn eine Abweichung von diesem stationären Zustand präpariert hat:

